

# FREKVENCIA TARTOMÁNYBELI EM MÓDSZEREKHEZ ELMÉLETI ALAPOK

A telegráf egyenlet az EM tér  $e^{+i\omega t}$  időszerinti változását feltételezve a következő alakú (A1), melyben jelen esetben csak az  $\vec{E}$  elektromos térerősség vektor szerepel (teljesen hasonló az egyenlet a mágneses térvektor vonatkozásában):

$$\Delta \vec{E} + (\mu \varepsilon \varpi^2 - i \varpi \mu \sigma) \vec{E} = \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0} \quad (1)$$

A fenti egyenlet megoldása akkor ha csak  $E_x$  komponenst tételezünk fel és a hullám lefelé terjed a homogén izotróp feltérben:

$$E_x(z, t) = E_{x0} e^{-ikz} e^{i\omega t} = E_{x0} e^{-i\alpha z} e^{-\beta z} e^{i\omega t} \quad (2)$$

Itt azt fogalmazzuk meg, hogy  $k = \alpha - i\beta$  alakú. Így a

$$k^2 = \alpha^2 - 2i\alpha\beta - \beta^2 = \mu \varepsilon \varpi^2 - i \varpi \mu \sigma \quad (3)$$

egyenletből a valós és képzetes részek egyenlőségéből  $\alpha$  és  $\beta$  meghatározható. A gyökvonásoknál csak a pozitív értékeket figyelembe véve írható, hogy

$$\alpha = \varpi \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \varpi^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{és} \quad \beta = \varpi \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \varpi^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

A szkin mélység az a mélység, melyben a felszíni térérték az  $e$ -ad részére csökken. A (2) egyenlet jobb oldalán az amplitúdó mélységgel való csökkenését  $E_{x0} e^{-\beta z}$  írja le, így a szkin mélység -  $z_s$  - számításához az alábbi egyenletet kell megoldani:

$$E_{x0} e^{-\beta z_s} = E_{x0} e^{-1} \quad \text{ebből} \quad z_s = 1/\beta = 1/\varpi \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \varpi^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Tehát a  $\beta$  csillapítási tényező és a szkin mélység egymással fordítottan arányos.

A hullámhossz az azonos fázisú pontok közötti távolság. A (2) egyenlet jobb oldalán a fázisviselkedést a második tényező írja le, így  $\lambda$  az

$e^{-2\pi i} = e^{-\alpha \lambda i}$  feltételből határozható meg, amiből

$$\lambda = 2\pi / \alpha = 2\pi / \varpi \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \varpi^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

A reflexiós szeizmika és a reflexiós georadar módszerek hasonlósága alapján állítható, hogy a georadar módszer vertikális felbontóképessége (az a rétegvastagság mely mellett a vizsgált réteg felső és alsó határfelületéről kapott reflexió egymástól megkülönböztethetően elválik, így a réteg "kimutatható" a reflexiós időszelvényen)  $\lambda/4$ , azaz a hullámhossz függvényében legalább ilyen vastagnak kell lenni a rétegnek (Rayleigh-kritérium). A laterális felbontóképesség mértékét az adó-vevő távolság (csökkentése a laterális felbontóképesség növelését segíti elő) és a Fresnel zóna nagysága határozza meg, amely a domináns hullámhossz és a vizsgált objektum reflektáló felület mélysége szorzatának négyzetgyökével arányos akkor, ha a reflektáló felület mélység szintje sokkal nagyobb, mint a hullámhossz. A Fresnel zónára vonatkozó összefüggésből meghatározható az a laterálisan jelentkező méret, amely még kimutatható. Tehát mind a vertikális, mind a horizontális felbontás mértéke függ a hullámhossztól.

A lefelé terjedő síkhullám terjedési sebessége  $v = \lambda / T = \lambda f$ , így

$$v = 1 / \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \varpi^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Az összefüggések az eltolási áramok elhanyagolásával élő esethez képest tehát bonyolultabbak, emlékeztetőül ott

$$\alpha = \beta = \left[ \frac{\varpi \mu \sigma}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{miatt} \quad z_s = \left[ \frac{2}{\varpi \mu \sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \lambda = 2\pi \left[ \frac{2}{\varpi \mu \sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

voltak, és ebben az esetben az EM hullám homogén vezetőképességű féltérbeli terjedési sebessége:

$$v = \lambda / T = 2\pi \left[ \frac{f}{\pi \mu \sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Másik határesetet akkor kapjuk meg, ha azt feltételezzük, hogy az eltolási áramok mértéke sokszorosa a vezetési áramokéhoz képest. Ez az eset alacsony vezetőképesség mellett, egészen nagy frekvenciájú EM tereknél jelentkezik. Ekkor (1) egyenlet a következő alakú:

$$\Delta \vec{E} + \mu \varepsilon \varpi^2 \vec{E} = \vec{0} \quad (10)$$

(3) szerinti felbontást figyelembe véve

$$\alpha = \sqrt{\mu \varepsilon \varpi^2} \text{ és } \beta = 0 \quad (11)$$

azaz ez EM térnek csillapodása nincs, a hullámhossz pedig (6) előtti feltételből

$$\lambda = 2\pi / \alpha = 2\pi / \sqrt{\mu \varepsilon \varpi^2} = \frac{1}{f \sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{v}{f} \quad (12)$$

amiből a terjedési sebesség

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (13)$$

ahol  $c$  a fény terjedési sebessége levegőben. (12) és (13) felhasználásával a hullámhossz ekkor közelíthető

$$\lambda = \frac{c}{f \sqrt{\varepsilon_r}} \quad (14)$$

értékkel. Ebből a formulából az következik, hogy a **frekvencia növelésével a hullámhossz csökken, így a felbontóképesség nő**, illetve az is látszik, hogy a **relatív dielektromos állandó növekedése szintén a jobb felbontást eredményező tényezők egyike. A felbontóképességet döntően befolyásoló ezen két tényező mellett megállapítható a hullámhossz csökkenése a vezetőképesség növekedése mellett a kis frekvenciás, ill. az általános esetben is** (8) és (6) szerint.

Az EM tér csillapodását a különböző esetekre (8)-, (4)- és (11)-ben szereplő  $\beta$  csillapítási tényező írja le. A felszín alatti tértartományban mindig fellép az EM tér gyengülése és a georadarnál alkalmazott frekvenciák mellett (4) jobb oldali összefüggése lehet a kiindulás.

Ha  $\sigma^2 / \varepsilon^2 \varpi^2 \ll 1$ , akkor  $(1 + \sigma^2 / \varepsilon^2 \varpi^2)^{1/2} \approx 1 + \sigma^2 / 2\varepsilon^2 \varpi^2$  alapján írható (4) helyett

$$\beta = \varpi \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \varpi^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2} \approx \varpi \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon^2 \varpi^2} - 1 \right] \right\}^{1/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \sigma \quad (15)$$

Tehát a **csillapítási tényező az elektromos vezetőképességgel lineárisan, míg a relatív dielektromos állandóval fordítottan arányos** abban az esetben amikor mind a vezetési, mind az eltolási áramok hatását figyelembe vesszük, azonban az eltolási áramok hatása **lényegesen nagyobb**. A fenti feltételezés mellett a csillapítási tényező frekvencia szerinti függése nem jelentkezik, tehát ebben a frekvencia tartományban nem a frekvenciális függés a meghatározó mindaddig, míg  $\sigma^2 / \varepsilon^2 \omega^2 \ll 1$ , azonban ez a hányados még nem tart a zérushoz.

Ugyanakkor a **csillapítási tényező a frekvencia növelésével rögzített  $\sigma$  és  $\varepsilon_r$  esetén (4) jobb oldali egyenlete szerint nő**, kis frekvenciák mellett (8) használható.

A georadar méréseknél a kimutatandó objektum mérete és a hullámhossz kapcsolata mellett fontos tehát az, hogy a kimutatandó objektum mélység szintjében még megfelelően nagy legyen az EM jel energiája. Ugyanakkor az is fontos, hogy a megfelelően nagy beérkező jel visszaverődjön. Ennek feltétele, hogy az egymással érintkezésben lévő anyagok elektromágneses paraméterei között kimutathatóságot lehetővé tevő eltérés legyen.

Vízszintesen 2 réteges féltér esetére rétegződésre merőleges síkhullámú EM hullámterjedést feltételezve a reflexiós tényező ( $R$ ) értéke

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (16)$$

ahol  $Z$  a síkhullámú EM tér impedanciája, az 1-es a felső, a 2-es index az alsó rétegre vonatkozó jelölés. Síkhullámú terekre érvényes impedancia összefüggés az  $e^{+i\omega t}$  idő szerinti változását feltételezve felírt  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -i\omega\mu\vec{H}$  Maxwell-egyenletből származtatható le úgy, hogy homogén, izotróp féltérben lefelé haladó,  $E_x$  és  $H_y$  komponensekkel jellemezhető síkhullámot tételezünk fel. Az  $y$  irányú komponensre felírt Maxwell-egyenletből :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{j} = -i\omega\mu H_y \vec{j} \quad (17)$$

Az  $x$  irányú elektromos térkomponens  $z$  szerinti derivált értéke (2) alapján  $\partial E_x / \partial z = -ikE_x$ . Ezt (17)-be helyettesítve, majd az egyenletet az impedancia értékére rendezve kapjuk, hogy

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k} \quad (18)$$

Könnyen belátható  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_o\mu_r = \mu_o$ , ill.  $k_i^2 \approx \mu_o\varepsilon_i\omega^2$  feltételezésekkel élve, hogy (16) helyett

$$R = \frac{\frac{\varpi\mu_2}{k_2} - \frac{\varpi\mu_1}{k_1}}{\frac{\varpi\mu_2}{k_2} + \frac{\varpi\mu_1}{k_1}} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} \quad (19)$$

írható. Összefoglalva a nagyobb frekvenciákon **a reflektált jel amplitúdója elsősorban az érintkező rétegekre jellemző relatív dielektromos állandók négyzetgyöke közötti különbségtől függ, azzal lineárisan arányos.**

## APPENDIX1: A telegráf egyenlet

A kiindulás a Maxwell egyenletek differenciális alakja:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

Az első Maxwell egyenlet szerint mind a vezetési mind az eltolási áram mágneses örvényteret hoz létre. A második alapján az elektromos tér örvényerőssége arányos a mágneses indukció időegységre eső változásával. A fenti összefüggésekhez tartozó kiegészítő egyenletek a következők:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho_v \quad (3)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad (4)$$

Azaz az elektromos eltolódás forrásbősége arányos a (térfogati) töltéssűrűséggel (3) alapján, ill. a mágneses tér forrásmentes, mert nincsenek szétválasztható mágneses töltések (4) szerint. Az egyenletekben szereplő vektor mennyiségek nem függetlenek egymástól. Köztük a lineáris összefüggés a legegyszerűbb feltételezés, amely homogén, izotróp estre vonatkozó közelítés. Ezen idealizált estre megfogalmazott anyagi egyenletek az alábbiak:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \quad (5-7)$$

A vezetési áraműrűséget az elektromos térerősség határozza meg (differenciális Ohm-törvény) ahol az arányossági tényező a fajlagos vezetőképesség; az elektromos eltolódás és az elektromos térerősség közötti lineáris összefüggésben az arányossági tényező a közeg dielektromos állandója; míg az utolsó egyenlet szerint a mágneses indukciót a mágneses térerősség határozza meg a közeg mágneses permeabilitásától függően.

Tételezzük fel az elektromágneses térerősségek  $e^{i\omega t}$  szerinti harmonikus időfüggését, továbbá azt, hogy nincsenek szabad elektromos töltések a  $\sigma$  fajlagos vezetőképességű tértartományban. Így a térerősség vektorok idő szerinti deriváltjai helyett a térerősség vektorok  $(i\omega)$ -szorosra vehető, másrészt a (6) anyagi egyenlet szerint nemcsak az elektromos eltolódás vektorának (3), hanem az elektromos térerősség vektorának divergenciája is zérus lesz. Az eddigiek figyelembevételével (1), ill. (2) helyett írható:

$$\text{rot}\vec{H} = \sigma\vec{E} + i\omega\epsilon\vec{E} \quad (8)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -i\omega\mu\vec{H} \quad (9)$$

Képezzük a (9) alakú, második Maxwell egyenlet rotációját:

$$\text{rotrot}\vec{E} = -i\omega\mu\text{rot}\vec{H} \quad (10)$$

A (10) bal oldalán lévő mennyiség meghatározható az alábbi vektorazonosság alapján is:

$$\text{rotrot}\vec{E} = \text{graddiv}\vec{E} - \Delta\vec{E} \quad (11)$$

Így (10) és (11) jobb oldalai is egyenlők egymással. Annak érdekében, hogy csak az elektromos térerősség szerepeljen, a (10) jobb oldalán (8) szerinti helyettesítést végezzük el, míg (11) jobb oldalán vegyük figyelembe, hogy az elektromos térerősség divergenciája zérus:

$$-i\omega\mu\text{rot}\vec{H} = -i\omega\mu(\sigma\vec{E} + i\omega\epsilon\vec{E}) = \text{graddiv}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} \quad (12)$$

Ezen egyenlet így a következő alakú lesz:

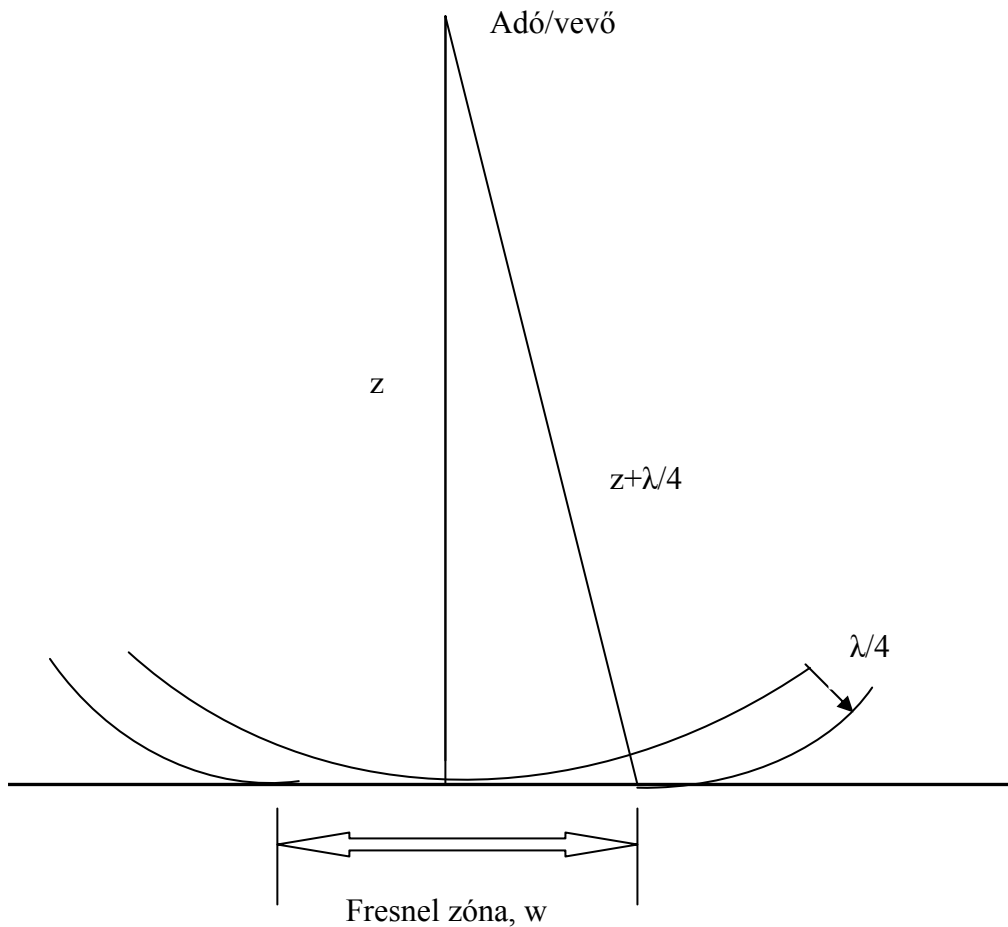
$$\Delta\vec{E} + (\mu\epsilon\omega^2 - i\omega\mu\sigma)\vec{E} = \Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = \vec{0} \quad (13)$$

Formailag teljesen hasonló alakú egyenlet vonatkozik a mágneses térerősség vektorra.

Ez a (8) egyenlet rotációjának képzésével, majd (9) (8)-nak jobb oldali helyettesítésével érhető el a mágneses térerősségre vonatkozó (11) vektor azonosság feltételezése mellett.

$$\text{A végeredményt felírva: } \Delta\vec{H} + (\mu\epsilon\omega^2 - i\omega\mu\sigma)\vec{H} = \Delta\vec{H} + k^2\vec{H} = \vec{0} \quad (14)$$

## APPENDIX1: Fresnel-zóna



Az a reflektált energia, amely fél hullámhossznál kisebb fáziskéséssel érkezik be, mint az első beérkezésű reflektált jel, az a reflexiót erősíti, ezt nevezük konstruktív interferenciának. Ezt a területet Fresnel zónának nevezük. A  $w$ -nél kisebb horizontális felületről kapott reflexiókat nem lehet elkülöníteni. Az ábrán látható derékszögű háromszögre írható, hogy

$$z^2 + (w/2)^2 = (z + \lambda/4)^2$$

Négyzetre emelést követően  $(\lambda^2/16)$ -ot a bal oldalon elhanyagolva kapjuk, hogy:

$$w = \sqrt{2\lambda z}$$

Adott mélységben tehát annál kisebb a Fresnel-zóna, minél nagyobb a frekvencia, azaz a horizontális felbontás mértéke a frekvencia növelésével fokozható. Ugyanakkor a kimutathatóság a vizsgált objektum mélységétől is függ, rögzített frekvencia mellett a mélység növelésével a kimutatathatóság csökken.



# EM terek numerikus modellezése

## Bevezetés

A numerikus modellezésre azért van igény, mert a legtöbb esetben kialakuló EM terek csak ritkán kezelhetők, ill. adhatók meg analitikus, zárt formában. Utóbbi megoldások csak egyszerűbb forrástér feltételezése mellett, homogén, izotróp tulajdonságú közegek (általában homogén féltérre vagy rétegzett féltérre, amelyek 1D-s szituációk) esetén alkalmazhatók. A több dimenziós feladatok megoldásához azonban numerikus módszerekre és ezzel együtt megfelelő számítógépes háttérre van szükség, ahol vagy a teljes EM térre vagy csak annak szekunder részére végzünk számításokat. Az EM tér matematikailag akkor válik kezelhetővé, ha a Maxwell – egyenletekből kiindulva a lezármaztatott egyenleteket parciális differenciálegyenletekké (DE), vagy integrálegyenletekké (IE) alakítjuk. Ezt követően a DE egyenleteket megoldhatjuk a véges különbségek módszerével (finite difference method, FD), vagy a variációs elv alkalmazásával a véges elemek módszerével (finite element method, FE). Az integrálegyenletek módszere a harmadik legfontosabb eljárás. Gyakran a különböző numerikus eljárások kombinációját alkalmazzuk, ilyenkor hibrid módszerekről beszélünk. Az említett eljárások az EM több dimenziós inverziós feladat alapelemei is lehetnek, ugyanis az inverzió során az előre modellezési feladat többszöri megoldására kerül sor. A három legfontosabb eljárás lényegének az ismertetésére a következőkben kerül sor.

A véges különbségek módszerénél a kiindulás a forrástaggal bővített Maxwell – egyenletek. Síkhullámú esetben a Maxwell – egyenletekből a távíróegyenlet származtatható le, és harmonikus időfüggés feltételezve a távíró egyenletek időtől független Helmholtz – egyenletekké alakulnak át. A hullámegyenletekben a deriváltak többváltozós Taylor sorfejtés révén közelíthetők. A mesterséges áramterű forrás esete bonyolultabb, és a feladat megfogalmazását jelentő parciális differenciálegyenlet(ek) is összetettebb(ek). A megoldás elve azonban közös, mert mindkét esetben a modellezni kívánt tértartományra egy derékszögű négyzöghálót fektetünk, és ezen háló rácspontjaiban a megoldás közelítő értékét határozzuk meg úgy, hogy minden egyes rácspontra az ismeretlen függvény értékét a szomszédos

pontokhoz tartozó értékek lineáris kombinációjaként írjuk fel. Leggyakrabban 5- vagy 9-pontos rácsmódszert alkalmaznak. A feladat és a modell jellegétől függő nagy méretű lineáris rendszert kell megoldani a matematikai értelemben vett elsődleges komponens(ek)re. Mint a többi numerikus eljárásnál itt is érvényesíteni kell a határfelületekkel párhuzamos térkomponensek folytonosságát a megfelelő peremfeltételek figyelembe vétele mellett. Ennek megfelelően a véges differenciaegyenletek eltérő alakúak.

A véges elemek módszere rugalmasabb, mint a véges különbségek módszere, ugyanis tetszőleges geometriájú sík vagy térbeli rácsra alkalmazható. Itt a differenciaegyenletek levezetése a variációs elvek felhasználásával történik, melyek az együtthatómátrix szimmetriáját és pozitív definit tulajdonságát is biztosítják. Itt tehát nem a Taylor sorfejtéses technikát alkalmazzuk, így filozófiájában is eltér a véges különbséges módszertől. Az EM módszerek vonatkozásában Coggon és Ryu (1971) alkalmazták először, ahol a rendszert leíró függvény a Poynting vektorral jellemezhető. Az elektromágneses módszerekre a teljes potenciális energiát a Maxwell egyenletekből kiindulva a Poynting téoréma alapján lehet meghatározni. A variációs integrál a síkhullámú, a mágneses vagy elektromos forrást feltételező esetre megadható, mely az Euler – Lagrange egyenlet alkalmazásával a megfelelő differenciál egyenletté alakítható át. Az energiafüggvény minimalizálása közelítőleg elvégezhető az egyes véges elemeken felvett lineáris interpolációs függvények segítségével. A megoldás függvényt a szerkezethez jobban alkalmazkodó szabálytalan rács elemek belső pontjaiban vagy a rácspontokban adják meg. Lényeges kérdés a rácspontok sorszámozása, mely az együtthatómátrix struktúráját befolyásolja. A cél itt is a minimális sáv szélességű együtthatómátrix kialakítása a lineáris algebrai feladat megoldása szempontjából. A véges elemes módszer alkalmazása előnyt élvez a véges különbséges módszerekkel szemben különösen akkor, ha dőlt vagy görbült határfelületek jellemzik a modellünket.

A numerikus modellezés harmadik lehetséges változata az integrálegyenletek módszere. A Maxwell egyenletek a Gauss -, illetve Stokes – tétel alkalmazásával integrál alakra hozható, majd ezen integrálegyenletek mátrix – egyenletké alakíthatók át. A módszer fontos jellemzője, hogy az inhomogenitásokon kívüli térrészben az EM tér meghatározható az inhomogenitásokat körülzáró felületre vonatkozó integrálok segítségével. Ezen integrálok Green függvényeket és fiktív elektromos és mágneses felületi áramsűrűségét, továbbá elektromos és mágneses felületi töltéssűrűséget tartalmaznak. A feladat itt is az előző két eljáráshoz hasonlóan lineáris rendszer megoldására vezet. Ez a módszer elsősorban akkor ajánlható ha 1D – s környezetben lévő, kis számú több dimenziós szerkezet hatását kívánjuk elemezni. Ilyenkor a feladat ezen eljárással lényegesen kisebb CPU idővel és kisebb

kapacitású számítógéppel oldható meg, mint a totális EM teret számító véges elemes vagy véges különbséges módszerrel.

## 2D MT véges különbséges modellezés

A megoldandó feladat azt tételezi fel, hogy a vizsgált szerkezet a mérési területen megnyúltsági iránnyal jellemezhető. Ezt a feltételezést általában más (pl. gravitációs vagy mágneses) módszerek mérési eredményei alapján tehetjük meg. Az anomáliák megnyúltsági iránya a szerkezeti csapásvonalat jelöli ki. Az általános eset természetesen 3D-s, azonban gyakran alkalmazható a 2D-s közelítés. A feladat kezelhetősége végett azonban azt feltételezzük, hogy a szerkezet a csapás irányában végtelen kiterjedésű, tehát ezen irányra merőleges síkok bármelyikében azonos geometriával és konduktivitás eloszlással jellemezhető metszetet kapnánk.

A 2D-s szerkezeti feltételezés mellett a további egyszerűsítésekkel, ill. feltételezésekkel élünk:

- A vizsgált tértartományban a beérkező EM tér megegyezik
- Egyetlen diszkrét  $f$  frekvenciájú,  $e^{i\omega t}$  harmónikus időfüggésű EM teret vizsgálunk
- A vezetési áram lényegesen nagyobb mint az eltolási áram
- A közeg izotróp
- Vízszintes a felszín

Először azt bizonyítjuk be, hogy ezen feltételezések mellett, a felszínre tetszőleges szöggel beeső EM síkhullám előállítható egy tisztán E módusú, ill. H módusú hullám szuperpozíciójaként.

Induljunk ki az I. Maxwell-egyenletből – mely szerint mind a vezetési áram, mind az eltolódási áram időben mágneses örvényteret létesít. Az eltolódási áramok hatásának elhanyagolásával:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \approx$$

$$\approx \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \sigma (\vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z)$$

Írjuk fel a II. Maxwell-egyenletet, amely azt fejezi ki, hogy az időben változó mágneses tér elektromos örvényteret hoz létre (továbbá itt is végezzük el a komponensekre bontást is):

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \\ &= -i \varpi \mu (\vec{i} H_x + \vec{j} H_y + \vec{k} H_z) \end{aligned}$$

Vegyük figyelembe, hogy a beeső EM tér állandó a vizsgált tértartományban, és a szerkezetnek csapásirányban EM tértorzító hatása nem lehet:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

Ez utóbbi megállapítást érvényesítve a komponens egyenletekre az I. ill. II. Maxwell-egyenletek helyett írható:

$$\left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \vec{j} - \left( \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \sigma E_x \vec{i} + \sigma E_y \vec{j} + \sigma E_z \vec{k}$$

$$\left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \vec{j} - \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} = -i \varpi \mu H_x \vec{i} - i \varpi \mu H_y \vec{j} - i \varpi \mu H_z \vec{k}$$

Csoportosítást úgy végezzük el, hogy külön legyenek azok az egyenletek, amelyekben a csapásirányú elektromos térkomponens  $E_x$  szerepel. ill. azok melyekben a csapásirányú

mágneses térkomponens  $H_x$  van. Az első Maxwell-egyenletből az  $\vec{i}$ -re a másodikkól a  $\vec{j}$ -re, ill.  $\vec{k}$ -ra vonatkozó egyenletekből

$$\left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = \sigma E_x$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega\mu H_y$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu H_z$$

Jól látható, hogy ezen 3 egyenletben a csapásirányú elektromos, a dőlésirányú és vertikális mágneses térkomponens szerepel. Annak érdekében, hogy a matematikailag egyszerűbb esetet kapjunk, az utóbbi két egyenletből  $H_y$  és  $H_z$  értékét helyettesítsük be az előtük lévőbe:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = i\omega\mu\sigma E_x$$

Ezzel eljutottunk a Helmholtz-féle időtől független parciális differenciálegyenlethez, amelyben egyetlen ismeretlen  $-E_x-$  szerepel. A másik polarizáció esetén teljesen hasonlóan járunk el: megkeressük azon komponens egyenleteket, melyekben  $H_x$  található. Jól látható, hogy ezek éppen a megmaradt, eddig fel nem használt egyenletek. Tehát:

$$\left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -i\omega\mu H_x$$

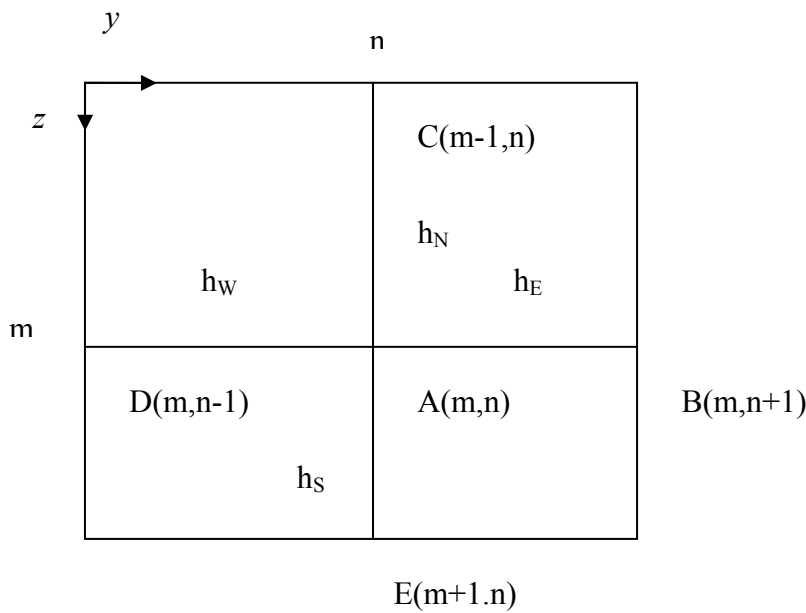
$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = \sigma E_z$$

Az egyenletek előzőhöz teljesen hasonló összedolgozásából kapjuk:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = i\omega\mu\sigma H_x$$

2D-s szerkezetek esetén harmónikus időszerinti térváltozást feltételezve tehát azt tapasztaltuk, hogy a tetszőleges polarizációjú sikhullám felbontható két, egymástól független eset szuperpozíciójára. Ez a külön válasz indokolja, hogy a két polarizáció matematikailag is egymástól függetlenül tárgyalható. Homogén, izotróp tértartományban a két polarizáció megegyező alakú differenciálegyenlettel írható le. A következőkben nézzük meg, hogy inhomogenitás nélküli esetben milyen véges differencia egyenlettel közelíthető a  $\Delta\phi + k^2\phi = 0$  alakú egyenlet, ahol  $\phi$  skalár mennyiség, ui. csapásirányú (x irányú) EM térkomponens.



1.ábra

Ennek érdekében a kétváltozós függvények Taylor-sorfejtés alakjából induljunk ki. Ha egy  $y, z$  koordinátájú pontban ismert a függvényérték, akkor egy  $y+h_y, z+h_z$  koordinátájú pontban a függvény értéke az alábbiak szerint határozható meg:

$$\phi(y+h_y, z+h_z) = \phi(y, z) + \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} h_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} h_z \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} h_y^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} h_y h_z + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} h_z^2 \right)$$

Az 1. ábra tünteti fel a koordinátarendszer irányítottágát,  $m$  a sorok,  $n$  az oszlopok számát jelöli. Az  $A(m,n)$  pontbeli függvényérték ismeretében a B, C, D, E rácspontbeli függvényértékek a következők:

$$\phi(m, n+1) = \phi(m, n) + \frac{\partial \phi}{\partial y} h_E + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} h_E^2 \quad (\text{B})$$

$$\phi(m-1, n) = \phi(m, n) - \frac{\partial \phi}{\partial z} h_N + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} h_N^2 \quad (\text{C})$$

$$\phi(m, n-1) = \phi(m, n) - \frac{\partial \phi}{\partial y} h_W + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} h_W^2 \quad (\text{D})$$

$$\phi(m+1, n) = \phi(m, n) + \frac{\partial \phi}{\partial z} h_S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} h_S^2 \quad (\text{E})$$

B egyenletet  $h_W$ -vel, D egyenletet  $h_E$ -vel szorozzuk meg azért, hogy a megszorított egyenletek összeadása során az elsőrendű deriváltak kiessenek. Hasonlóan C egyenletet  $h_S$ -sel, míg E egyenletet  $h_N$ -nel szorozzuk meg majd összegezzük őket:

$$h_W \phi(m, n+1) + h_E \phi(m, n-1) = (h_W + h_E) \phi(m, n) + (h_W h_E^2 + h_E h_W^2) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$h_S \phi(m, n+1) + h_N \phi(m+1, n) = (h_S + h_N) \phi(m, n) + (h_S h_N^2 + h_N h_S^2) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Az előbbi egyenletből a skalár függvény dőlés-, míg az utóbbiból a vetikális irány szerinti második derivált közelítő értéke fejezhető ki. Ezek ismeretében homogén esetre a Helmholtz egyenlet véges különbséges alakja könnyen megadható, hisz a  $\Delta \phi + k^2 \phi = 0$  egyenletben a második derivált közelítő értéke így adott, míg a második tag értelemszerűen  $k^2 \phi(m, n)$  lesz.

A fentiek értelmében a véges differencia egyenlet

$$a\phi(m, n) + b\phi(m, n + 1) + c\phi(m - 1, n) + d\phi(m, n - 1) + e\phi(m + 1, n) = 0 \quad (\text{F})$$

alakú, ahol  $b, c, d, e$  együtthatók a frekvenciától és a konduktivitástól függetlenek, tehát csak a rács geometriai méreteitől függenek. Ez nem mondható el az  $a$  együtthatóról, mely a hullámszámnak –így mind a frekvenciának, mind a konduktitásnak- függvénye. Fontos kihangsúlyozni, hogy mindez csak az elvi jelentőségű homogén esetre igaz. Másrészt az is nyilvánvaló, hogy ezen közelítésekkel egy 5 pontos rácsmódszer (véges különbséges) kiindulásának alapjait sikerült bemutatni. Az együtthatók tehát homogén tértartományra:

$$a = k^2 - 2(1/h_E h_W + 1/h_S h_N) \quad (\text{G})$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{2}{(h_E + h_W)} h_E & c &= \frac{2}{(h_S + h_N)} h_N \\ d &= \frac{2}{(h_E + h_W)} h_W & e &= \frac{2}{(h_S + h_N)} h_S \end{aligned} \quad (\text{H})$$

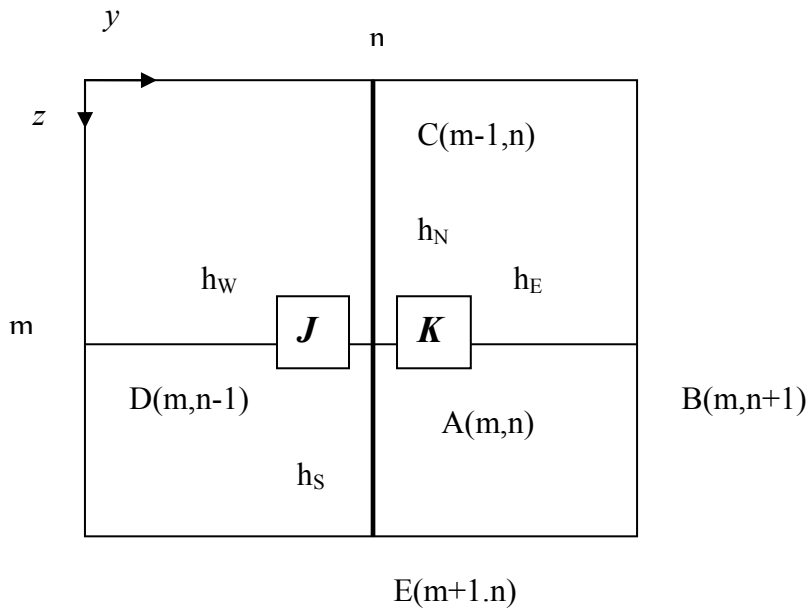
Tehát ezek az együtthatók konstans hullámszámú hálórészre, a rács belsejében érvényesek. Az eddigiek viszont szükségesek voltak ahhoz, hogy áttérjünk az egymással érintkezésben lévő, különböző konduktitású térrészek esetére. A határfelületeken az elektromos és a mágneses térerősség tangenciális összetevői folytonosak. A határfelületek a derékszögű hálót alkalmazó véges különbséges modellezés során vízszintesek vagy függőlegesek lehetnek. Nézzük azt az esetet, amikor egy függőleges sík választ el két különböző konduktitású térrészt a 2. ábra szerint. Tételizzük fel az E polarizáció esetét. Ekkor a C-, D-, E rácspontokra felírt egyenletek a  $\mathbf{J}$ -ik közegre vonatkoznak ugyanis a D pontra felírt Taylor-sorfejtéses formulában az A pontbeli érték épp az A pontbeli  $E_x$  érték, ill. a C és E rácspontokra vonatkozó egyenletekben valamennyi  $\phi$  érték határfelületi tangenciális elektromos térkomponens érték ( $E_x$ ). A cél az, hogy a  $\mathbf{K}$ -ik közegben lévő B pontbeli csapásirányú elektromos térkomponens a  $\mathbf{J}$ -ik közegre vonatkozó csapásirányú elektromos térkomponens függvényében adjuk meg. A kiindulás értelemszerűen a B egyenlet:

$$E_x^K(m, n + 1) = E_x^K(m, n) + \frac{\partial E_x^K}{\partial y} h_E + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_x^K}{\partial y^2} h_E^2$$



A törekvésünk formálisan azt jelenti, hogy ezen egyenlet jobb oldalán valamennyi  $K$  index helyett  $J$  szerepeljen. Mivel ezen vertikális határfelület mentén  $E_x$  mellett  $H_z$  folytonossága is fenn áll, továbbá a vertikális mágneses térkomponens épp  $E_x$  dőlésszerinti változásával arányos (lásd az  $E$  polarizációra megadott 3. egyenlet), ha a két közegre a relatív mágneses permeabilitás megegyezik, akkor  $\partial E_x / \partial y$  is. A jobb oldalon lévő második derivált másik közegre vonatkozó kifejezése érdekében a két közegre egyaránt érvényes Helmholtz egyenlet egyenlőségének felírásából célszerű kiindulni.

$$\Delta E_x^J + k_J^2 E_x^J = \Delta E_x^K + k_K^2 E_x^K = 0$$



2.ábra

Ezen egyenletben a második derivált csak dőlésirányban marad meg, ugyanis a csapásirányú elektromos térkomponens folytonossága a határfelület mentén folyamatosan teljesül, így a  $z$  szerinti első és második deriváltakra is fennáll az egyenlőség. A  $K$ -ik közegre vonatkozó dőlés szerinti második derivált:

$$\frac{\partial^2 E_x^K}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 E_x^J}{\partial y^2} + (k_J^2 - k_K^2) E_x^J$$

Ezt is behelyettesítve a B egyenlet ezelőtti alakjába kapjuk, hogy

$$E_x^K(m, n+1) = E_x^J(m, n) + \frac{\partial E_x^J}{\partial y} h_E + \frac{1}{2} h_E^2 \left( \frac{\partial^2 E_x^J}{\partial y^2} + (k_J^2 - k_K^2) E_x^J \right)$$

Tehát ezzel célunkat elértük, így a  $K$  index használata feleslegessé vált, elértük azt, hogy az eltérő konduktivitású tértartományokat elválasztó vertikális határfelület esetén valamennyi Taylor –sorfejtéses közelítésben a baloldali térkomponensek és azok deriváltjai szerepelnek a két konduktivitás és a frekvencia értéke mellett. Ilyen modell feltevésnél ez utóbbi egyenlet helyettesíti E polarizáció esetén a B egyenletet, a többi (C,D,E) változatlan. Az utolsó egyenlet térkomponensekre vonatkozó indexek nélküli alakja, illetve a C, D, E egyenletek amelyekben  $\phi$  helyett  $E_x$  szerepel:

$$E_x(m, n+1) = E_x(m, n) + \frac{\partial E_x}{\partial y} h_E + \frac{1}{2} h_E^2 \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + (k_J^2 - k_K^2) E_x \right) \quad (B^*)$$

$$E_x(m-1, n) = E_x(m, n) - \frac{\partial E_x}{\partial z} h_N + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} h_N^2 \quad (C^*)$$

$$E_x(m, n-1) = E_x(m, n) - \frac{\partial E_x}{\partial y} h_W + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} h_W^2 \quad (D^*)$$

$$E_x(m+1, n) = E_x(m, n) + \frac{\partial E_x}{\partial z} h_S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} h_S^2 \quad (E^*)$$

B\* egyenletet  $h_W$ -vel, D\* egyenletet  $h_E$ -vel szorozzuk a korábbiakhoz hasonlóan azért, hogy a megszorított egyenletek összeadása során az elsőrendű deriváltak kiessenek. Hasonlóan C\* egyenletet  $h_S$ -sel, míg E\* egyenletet  $h_N$ -nel szorozzuk meg majd képezzük összegüket.

Az első összegegyenletben a csapásirányú elektromos térkomponens dőlés-, míg a másodikban a vertikális irány szerinti második deriváltja szerepel. Ezen második deriváltakat az egyenletekből kifejezve, majd behelyettesítve a Helmholtz egyenletbe  $E_x$ -re egy (F) alakú

egyenletet kapunk, melyben az együtthatók a homogén esethez képest csak az A (m,n) pontbeli csapásirányú elektromos térkomponens együtthatójában mutat eltérést.

$$a^* = (h_W k_J^2 + h_E k_K^2) / (h_E + h_W) - 2(1/h_E h_W + 1/h_S h_N) \quad (G^*)$$

$$b^* = b \quad c^* = c \quad d^* = d \quad e^* = e \quad (H^*)$$

Teljesen hasonló gondolatmenet alkalmazásával érhető el, hogy hasonló modellre (vertikális határfelület választ el két különböző hullámszámú térrészt) a megfelelő H polarizációs véges differencia egyenletet felírjuk. Ekkor a csapásirányú mágneses és a vertikális elektromos térkomponens folytonosságát kell érvényesíteni a vertikális határfelület mentén. A véges differencia egyenlet együtthatóinak levezetési módja itt is teljesen hasonló, mint E polarizációnál, és mivel a belső határfeltételek a két polarizációnál más komponensekre érvényesek, az együtthatók is eltérőek lesznek az E és H polarizációs esetben.

Megállapítható, hogy ily módon az eltérő konduktivitású térrészeket elválasztó határfelületi (amely vízszintes vagy függőleges lehet) belső rácspontra a két polarizációra megadhatók. A fenti gondolatmenet folytatható akkor is, ha a véges differencia egyenletet olyan belső rácspontra írjuk fel, mely három vagy négy különböző konduktivitású derékszögű négyyszög cella közös csúcspontja. A legáltalánosabb eset az, amikor négy eltérő konduktivitású cellának van egy közös pontja. Ekkor pl. E polarizációt feltételezve a vertikális határfelület mentén  $E_x$  és  $H_z$ , a vízszintes határfelület mentén pedig  $E_x$  és  $H_y$  folytonosságát kell előírni. Valamennyi belső határfeltétel figyelembevételével túlhatározott egyenletrendszerre vezet. Ezt úgy lehet elkerülni, hogy az eltérő konduktivitású cellák középpontjai között a cellákra jellemző konduktivitás értékek közötti lineáris változást tételezünk fel.

A következőkben a két polarizációra vonatkozó peremfeltételekkel foglalkozunk. Azt vizsgáljuk, hogy a modellezés során használt oldalirányú, felső és alsó rácshatárolások során milyen feltételezésekből indulunk ki, és milyen közelítéseket fogadunk el peremfeltételekként.

**A H polarizációs peremfeltételek.** Először vizsgáljuk meg, hogy kell-e a levegőre rácsot fektetni? Az első Maxwell egyenletből –mivel  $rot\vec{H} = \sigma\vec{E}$  - következik, hogy  $rot\vec{H} = \vec{0}$ ,

azaz levegőben a mágneses tér állandó, hisz egyetlen irány szerint sem változik. Tehát a csapásirányú mágneses térkomponens is állandó a levegőben (egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a felszínen a csapásirányú mágneses térkomponens valós része 1.0, míg képzetes része 0.) . Mivel H polarizációnál a véges differencia egyenletrendszerben az ismeretlenek a rácspontbeli csapásirányú mágneses térkomponens érték, ezért a levegőben nem kell rácsot felvenni. A véges különbséges modellezésnél oldalirányban is le kell határolni a rácsot. Akkor járunk el helyesen, ha az inhomogenitástól olyan távol történik meg ez a lehatárolás, ahol a mágneses térnek már nincs dőlésirányú változása, azaz feltételezzük, hogy a felszín alatt, elegendően távol:

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = 0$$

Ha a dőlés szerinti második deriváltra is hasonló feltételezéssel élünk, akkor a H polarizációra felírt Helmholtz egyenletből

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = i\omega\mu\sigma H_x = -k^2 H_x$$

Ez az egyenlet a homogén feltételre vonatkozó megoldást adja, melyhez hozzávéve az idő szerinti harmonikus változást a csapásirányú mágneses térkomponens modell szélén lévő vertikális határ menti mélység- és időszerinti változása adható meg:

$$H_x(z,t) = H_{x0} e^{-kz} e^{+i\omega t} = H_{x0} e^{-\sqrt{-i\omega\mu\sigma}z} e^{+i\omega t} = H_{x0} e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma}z} e^{+i\omega t} = H_{x0} e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z} e^{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}iz} e^{+i\omega t}$$

A formula alapján a felszíni érték  $-H_{x0}$ - ismeretében a felszíntől számított tetszőleges mélységben -ahol a rácsához tartozóan sort veszünk fel- a térkomponens meghatározható (időfüggésre természetesen nincs szükség). Ha az inhomogenitás(oka)t magába foglaló tér rétegzett, akkor a modell szélén lévő, legszélső bal- és jobboldali oszlop rácspontjaiba a rétegzett feltételre jellemző értékeket állítjuk be.

Az **E polarizációs peremfeltételeket** először a levegőre adjuk meg és szorítkozzunk a rács függőleges széleire. Itt is érvényes, hogy  $rot\vec{H} = \sigma\vec{E} = \vec{0}$ , amiből következik:

$$\left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = \sigma E_x = 0$$

Ezen esetben is feltételezhető, hogy az inhomogenitástól távol a  $H_z$  komponens dőlésirányban nem változik, tehát

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \Rightarrow H_y(z) = H_{y0}$$

Tehát  $H_y$  a levegőben a rács szélén  $z$  függvényében állandó és értéke a dőlésirányú felszíni mágneses térkomponenssel egyezik meg. Mivel az E polarizációs feladatnál a csapásirányú elektromos térkomponens meghatározása a cél, így az alábbi egyenletből levegőre határozzuk meg ezt a komponenst!

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -i\omega\mu(\vec{i}0 + \vec{j}H_y + \vec{k}H_z)$$

Amiből 
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega\mu H_y \Rightarrow E_x = -i\omega\mu H_{y0}z$$

tehát a rács szélein vertikálisan a csapásirányú elektromos térnek lineáris változását kell feltételezni. Emiatt viszont a levegőre is, ellentétben a másik polarizációval, rácsot kell fektetni. A felszín alatt a két szélső oszlop mentén lévő rácspontokban teljesen hasonló elvet érvényesítünk mint a másik polarizáció esetén.

## A lineáris egyenletrendszer megoldása

A parciális differenciálegyenletnek megfelelő véges differenciaegyenlet attól függően, hogy rácsszegélyen, vagy a rács egy belső rácspontjára lett felírva más és más alakú. Ha valamennyi véges differenciaegyenlet ismert, akkor sor- vagy oszlop folytonosan adjuk meg őket. Ennek eredményeként az együtthatómátrix sáv struktúrájú, amit az egyenletrendszer megoldása során figyelembe lehet venni, függetlenül attól, hogy az egyenletrendszer direkt vagy iteratív módját válasszuk. A következőkben az egyenletrendszer iteratív megoldásának egy lehetséges változatát mutatjuk be.

Az ötpontos rács módszer alkalmazásakor az 1. ábra jelöléseit használva a (F) alakú egyenlet írható fel. Balról jobbra sorfolytonosan felülről lefelé haladva a rácson, jelöljük a központi  $-m$  sor- és  $n$  oszlopszámmal jellemezhető  $A$  pontot 0-val, míg a haladási iránynak megfelelően a többi rácspontnak C, D, B, E sorrendben feleljen meg az 1,2,3,4 jelölés. Ekkor

a középpontbeli függvényérték a szomszédos négy rácspontbeli függvényérték lineáris kombinációjaként adható meg (F) egyenletből átrendezés után:

$$\varphi_0 = C\varphi_1 + D\varphi_2 + B\varphi_3 + E\varphi_4$$

A Gauss-Seidel iterációs eljárásnál a k-ik iterációban amikor a A pontra számítjuk ki a függvényértéket és feltételezve azt, hogy a minden egyes iterációnál a fenti sorfolytonos irány szerint haladunk írható (mivel a C és D pontokra a k-ik iterációban már számoltunk függvényértéket, míg a B és E pontokra még csak az ezt megelőző iterációs lépésben):

$$\varphi_{0,G-S}^k = C\varphi_1^k + D\varphi_2^k + B\varphi_3^{k-1} + E\varphi_4^{k-1}$$

Megjegyezzük, hogy az eljárás feltételezi, hogy már az első iteráció előtt valamennyi rácspontban van valamilyen ( a peremfeltételek miatt rögzített vagy másutt valamilyen közelítő) megoldás. A Gauss-Seidel eljárás bizonyítottan konvergens, azonban a gyorsabb számítási végett gyakran végzünk szukcesszív túlrelaxációt (succesive over relaxation kezdőbetűiből rövidítve SOR), amely a k-ik lépésben a Gauss-Seidel eljárással meghatározott értéket egy konvergencia gyorsító faktorral súlyozza, de figyelembe veszi az ezt megelőző iterációs lépésben meghatározott értéket is:

$$\varphi_{0,SOR}^k = \tau\varphi_{0,G-S}^k + (1 + \tau)\varphi_{0,SOR}^{k-1}$$

Ezen formulában a konvergencia gyorsító faktor ( $\tau$ ) csak szimmetrikus együtthatómátrix mellett határozható meg analitikusan (a Gauss-Seidel eljárás iterációs mátrixának spektrális sugarából, ami normából számítható), míg esetünkben az együtthatómátrix nem szimmetrikus volta miatt értékére csak becslés adható. A becslés a konvergencia gyorsító faktor valós részére vonatkozik, a képzetes résznek stabilizáló szerepe van.

## Pontszerű elektromos dipólus forrás felszíni EM terének meghatározása 2D-s esetben

Azt a feladatot nevezzük 2.5D-snek, ahol 2D-s szerkezetet feltételezve az elektromos vagy mágneses gerjesztés pontszerűnek tekinthető. Ebben az esetben a pontforrás tere 3D-s.

Ekkor a megoldásnak eleget kell tennie a forrás tagokkal bővített Maxwell – egyenleteknek. Háromdimenziós források - elektromos és mágneses dipólusok – 2D-s szerkezetek fölötti terének meghatározására a Maxwell - egyenletek a következő alakúak [Takács (1981)]:

Ha az időszerinti függés  $e^{i\omega t}$  alakú, akkor:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -i\omega\mu(\vec{H} + \vec{M}_s)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = (\sigma + i\omega\varepsilon)\vec{E} + \vec{j}_s$$

ahol  $\vec{M}_s$ -a térrészben jelenlevő mágneses dipólusforrás momentuma,  $\vec{j}_s$  az elektromos forrástól származó áramsűrűség. A fenti egyenletek az elektromágneses tér helytől való függését a frekvencia tartományban írják le. Legyen a szerkezeti csapás iránya változatlanul párhuzamos az  $\underline{x}$  tengellyel és az EM tér tetszőleges összetevője  $F$ . Írja le  $F$  viselkedését a csapás mentén  $F(x)$ . A Fourier transzformáció révén a tértartományra vonatkozó  $F(x)$  összefüggéshez a térbeli hullámszám tartományra vonatkozó  $\tilde{F}(k_x)$  összefüggés adható meg.

A  $k_x - t$  térbeli hullámszámnak nevezzük, és az  $\underline{x}$  vonal azaz a szerkezeti csapás mentén a  $2\pi$  távolságra eső ciklusok számát jelenti. Emiatt használatos a térbeli frekvencia elnevezés is, a dimenzió  $m^{-1}$ . Az egyváltozós Fourier transzformációval megadható, hogy az eredeti  $F(x)$  térkomponens függvényben az egyes  $k_x$  térbeli frekvenciájú komponensek milyen amplitúdóval és fázissal vannak jelen. Amennyiben csak csapás, illetve dőlés irányú elektromos dipólus forrás gerjesztést tételezünk fel, továbbá az eltolási áramot elhanyagolhatónak tekintjük a vezetési áramhoz képest, a komponensekre felírt Maxwell egyenletek az  $x$  szerinti Fourier transzformált térben adhatjuk meg. Ha a tetszőleges irányú elektromos vagy mágneses komponens  $F(x, y, z)$ -vel jelöljük, mely függvényről feltételezzük, hogy abszolút integrálható, akkor Fourier transzformáltja:

$$\tilde{F}(k_x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z) e^{-ik_x x} dx$$

Az elektromágneses térkomponensek csapásirányú deriváltjainak Fourier transzformáltja pedig a parciális integrálási szabály alkalmazásával adható meg:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} e^{-ik_x x} dx = \left[ F(x, y, z) e^{-ik_x x} \right]_{-\infty}^{\infty} + ik_x \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z) e^{-ik_x x} dx = ik_x \tilde{F}(k_x, y, z)$$

Ha  $x \rightarrow \infty$  vagy  $x \rightarrow -\infty$  akkor valamennyi térkomponens az  $x=0$  helyen lévő dipólus forrás esetén zérushoz tart, így a jobboldali kifejezés első tagja is ezért igaz, hogy egy függvény parciális deriváltjának Fourier transzformáltja az irány szerinti térbeli hullámszám és magának a függvény Fourier transzformáltja szorzatának képzetesegység-szerese. A komponensekre vonatkozó Maxwell egyenletek felírásakor felhasználva, hogy bármely térkomponens  $x$  szerinti deriváltjának Fourier transzformáltja a térkomponens Fourier transzformáltjának  $(ik_x)$  – szerese írható, hogy:

$$\partial \tilde{E}_z / \partial y - \partial \tilde{E}_y / \partial z = -i\omega\mu \tilde{H}_x \quad (\text{TM1})$$

$$\partial \tilde{E}_x / \partial z - ik_x \tilde{E}_z = -i\omega\mu \tilde{H}_y \quad (\text{TE2})$$

$$ik_x \tilde{E}_y - \partial \tilde{E}_x / \partial y = -i\omega\mu \tilde{H}_z \quad (\text{TE3})$$

$$\partial \tilde{H}_z / \partial y - \partial \tilde{H}_y / \partial z = \sigma \tilde{E}_x + \tilde{j}_{sx} \quad (\text{TE1})$$

$$\partial \tilde{H}_x / \partial z - ik_x \tilde{H}_z = \sigma \tilde{E}_y + \tilde{j}_{sy} \quad (\text{TM2})$$

$$ik_x \tilde{H}_y - \partial \tilde{H}_x / \partial y = \sigma \tilde{E}_z \quad (\text{TM3})$$

Az MT 2D-s estnek megfelelő HPOL egyenletek itt a TM jelölésűek, míg az ottani EPOL egyenleteknek itt a TE jelű három egyenlet felel meg.



Forrásmentes térrészre ( $j_{sx} = j_{sy} = 0$ ) a fenti egyenletekből a többi térösszetevő kifejezhető  $\tilde{E}_x$  és  $\tilde{H}_x$  segítségével, ami leegyszerűsíti feladatunkat, mert így csak két skalár függő változóra kell megoldást keresnünk. Mivel ebben az esetben –ellentétben a MT-hoz képest– a források tere 3D-s mint látni fogjuk a  $k_x \neq 0$  miatt az egyenletek nem lesznek függetleníthetők. Az MT módszernél használt komponens egyenlet csoportosítás azonban itt is elvégezhető. Törekedjünk arra, hogy az MT H polarizációhoz tartozó egyenletek megfelelői szerepeljenek az egyik csoportban tehát a  $\tilde{H}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z$  komponensek feltétlenül (HPOL&TM módusához tartozó komponensek), míg az E polarizációhoz tartozó  $\tilde{E}_x, \tilde{H}_y, \tilde{H}_z$  komponensek a másikban (EPOL&TE módus). Egyetlen "tisztá" a TM módusához tartozó egyenlet van ez a TM1 egyenlet. A második TE2 és TM3 egyenletekből  $\tilde{H}_y$ , míg a harmadik TE3 és TM2  $\tilde{H}_z$  eliminációjával adható meg :

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} = -i\omega\mu \tilde{H}_x$$

$$\left(\sigma + \frac{k_x^2}{i\omega\mu}\right) \tilde{E}_z = -\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} - \frac{k_x}{\omega\mu} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z}$$

$$-\left(\sigma + \frac{k_x^2}{i\omega\mu}\right) \tilde{E}_y = -\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} + \frac{k_x}{\omega\mu} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} + \tilde{j}_{sy}$$

Az így megadott TM egyenletekben  $\tilde{H}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z$  komponensek mellett tehát  $\tilde{E}_x$  is szerepel. A TE módusához tartozó egyenletek között a TE1 számú adott. A következő TE3 és TM2 egyenletekből most  $\tilde{E}_y$ , míg a harmadik TE2 és TM3 egyenletekből  $\tilde{E}_z$  eliminációjával határozható meg:

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} = \sigma \tilde{E}_x + \tilde{j}_{sx}$$

$$-\left(i\omega\mu + \frac{k_x^2}{\sigma}\right)\tilde{H}_z = -\frac{\partial\tilde{E}_x}{\partial y} + \frac{ik_x}{\sigma}\frac{\partial\tilde{H}_x}{\partial z} - \frac{ik_x}{\sigma}\tilde{j}_{sy}$$

$$(i\omega\mu + \frac{k_x^2}{\sigma})\tilde{H}_y = -\frac{\partial\tilde{E}_x}{\partial z} - \frac{ik_x}{\sigma}\frac{\partial\tilde{H}_x}{\partial y}$$

Itt viszont  $\tilde{E}_x, \tilde{H}_y, \tilde{H}_z$  komponensek mellett  $\tilde{H}_x$  is megjelenik. Annak érdekében, hogy az ismeretlenek száma a két móduszra tovább csökkenjen, mindkét polarizációnál hasonlóan járjunk el. A "tisztá" polarizációs egyenletek baloldali két deriváltját fejezzük ki az ugyanazon polarizációhoz tartozó másik két egyenletből és azokat helyettesítsük be a "tisztá" polarizációs egyenletbe.

A TM és TE móduszhoz tartozó egyenletekben a távvezeték egyenletekhez hasonlóan folytonos impedancia és admittancia értékeket definiálhatók a következő módon (Stoyer , 1976):

$$\zeta^M = \sigma \left(1 - \frac{k_x^2}{k^2}\right) \quad \text{- TM impedancia}$$

$$\zeta^E = i\omega\mu \left(1 - \frac{k_x^2}{k^2}\right) \quad \text{- TE impedancia}$$

$$\nu^M = i\omega\mu \quad \text{- TM admittancia}$$

$$\nu^E = \sigma \quad \text{- TE admittancia}$$

Itt a MT-hoz hasonlóan  $k^2 = -i\omega\mu\sigma$ . Az impedancia és admittancia értékeket helyettesítsük be a TM és TE móduszhoz tartozó egyenletekbe, és bevezetve a

$$\xi = (k_x^2 - k^2)^{-1}$$

jelölést a TM móduszra a következő parciális differenciál egyenletet kapjuk:

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\zeta^M} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\zeta^M} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} \right) - ik_x \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} + ik_x \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} +$$

$$+ \nu^M \tilde{H}_x = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tilde{j}_{sy}}{\zeta^M} \right)$$

TE móduszra vonatkozóan a parciális differenciálegyenlet hasonlóan kapva meg, írható:

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\zeta^E} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\zeta^E} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} \right) + ik_x \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} - ik_x \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} + \nu^E \tilde{E}_x =$$

$$= -\tilde{j}_{sx} + ik_x \frac{\partial}{\partial y} (\xi \tilde{j}_{sy})$$

Ez a két egyenlet csupán az  $\tilde{E}_x$  és  $\tilde{H}_x$  komponenseket tartalmazza, azonban a TM móduszhoz tartozó egyenletben így megjelenik a 2D-s MT – től eltérően a csapás irányú elektromos tér, illetve a TE módusz egyenletében a csapás irányú mágneses tér. Összefoglalva a síkhullámú esethez képesti különbséget megállapítható, hogy

ezen feladat a Fourier transzformált térben oldható meg

a két módusz között csatolás van

a feladatot leíró egyenletekben a forrásból eredő tagok is megjelennek.

A két forráspolarizáció vizsgálatokor vagy csapásirányú, vagy rá merőleges és vízszintes (y) irányú gerjesztést tételezünk fel. Előbbi a TE, utóbbi a TM módusznak felel meg. Az eddigi levezetésekben együtt kezeltük a két gerjesztést. Felírva a TE módusznak megfelelő parciális differenciál egyenletrendszer:

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\zeta^M} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\zeta^M} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} \right) - ik_x \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} + ik_x \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} + \nu^M \tilde{H}_x = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\zeta^E} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\zeta^E} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} \right) + ik_x \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} - ik_x \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} + \nu^E \tilde{E}_x = -\tilde{j}_{sx}$$

Teljesen hasonlóan a csapásirányra merőleges gerjesztés mellett:

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\zeta^M} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\zeta^M} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} \right) - ik_x \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} + ik_x \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} + \nu^M \tilde{H}_x = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tilde{j}_{sy}}{\zeta^M} \right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\zeta^E} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\zeta^E} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} \right) + ik_x \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} - ik_x \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} + \nu^E \tilde{E}_x = ik_x \frac{\partial}{\partial y} (\xi \tilde{j}_{sy})$$

Az egyenletrendszer megoldása során minden egyes rácspontra a Fourier transzformált csapás irányú elektromos-, és mágneses komponenst ( $\tilde{E}_x$  és  $\tilde{H}_x$ ) határozzuk meg.

### Finite difference formulation (véges különbséges formalizmus)

A five-point difference operator for the second derivative of the Fourier domain and transmission sheet analogy was applied by Stoyer and Greenfield (1976) to solve the 2.5-D problem due to magnetic dipole source. Following their method the final form of the finite difference equation system replacing partial differential equation system above assuming electric source parallel to the structural strike is as follows:

$$\sum_{i=1}^4 \left( \frac{\tilde{H}_{ix} - \tilde{H}_{0x}}{-Z_i^M} + \frac{\tilde{E}_{ix} - \tilde{E}_{0x}}{C_i} \right) + Y_0^M \tilde{H}_{0x} = 0 \quad 15$$

$$\sum_{i=1}^4 \left( \frac{\tilde{E}_{ix} - \tilde{E}_{0x}}{-Z_i^E} + \frac{\tilde{H}_{ix} - \tilde{H}_{0x}}{C_i} \right) + Y_0^E \tilde{E}_{0x} = -\tilde{j}_{s0x} \Delta y \Delta x \quad 16$$

Where  $Z$  denotes lumped impedances,  $C$  denotes coupling terms between one of the four neighbouring nodes and the central one,  $Y$  denotes lumped admittances. These lumped parameters can be expressed in the function of geometry of grid elements and the physical parameters of the grid (they are treated as distributed parameters which are constant within each grid element). The only parameter which is independent of the grid geometry it is the coupling term  $C$ . We notice that similar equations can be derived if the source term is perpendicular to the strike, for the situation of TM mode. The only difference could be found only on the right hand side of (15) and (16). The source terms are considered as distributed

parameters without strike directional extension, making possible the determination of the Fourier transform of the electric source. Instead of solving complex (coefficient matrix and unknowns are both complex) equation system in the spatial wave number domain for each grid node four real equations can be written. Numbering grid nodes column-wise from left to right and writing the equations successively, the resulting linear equation system has a non-symmetrical  $[Q]$  coefficient matrix with  $4mn*4mn$  elements and block tridiagonal structure. Usually the applied grids had more columns ( $n$ ) than rows ( $m$ ) this is the reason of numbering column-wise. One way for the solution to this linear problem can be the block tridiagonal LU decomposition.

$$[Q]\bar{X} = \{[F]_l[M]_l[N]_l\}_l^n \bar{X} = [L][U]\bar{X} = \{[C]_l[I]_l[0]_l\}_l^n \{[0][A]_l[N]_l\}_l^n \bar{X} = \bar{S} \quad 17$$

Here all ( $n$ ) blocks have  $4m*4m$  elements.

After the introduction of  $[U]\bar{X} = \bar{Y}$  the first step is to solve  $[L]\bar{Y} = \bar{S}$  which can be obtained recursively:

$$\bar{Y}_1 = \bar{S}_1 \quad \bar{Y}_l = \bar{S}_l - [F]_l[A]_{l-1}^{-1}\bar{Y}_{l-1} \quad l = 2,3,\dots,n \quad 18$$

Assuming different sources or source positions -  $\bar{R}$  - the solution would be determined similarly, i.e.:

$$\bar{Y}_1 = \bar{R}_1 \quad \bar{Y}_l = \bar{R}_l - [F]_l[A]_{l-1}^{-1}\bar{Y}_{l-1} \quad l = 2,3,\dots,n \quad 19$$

From which the solution of  $[U]\bar{X} = \bar{Y}$  i.e. that of (17):

$$\bar{X}_n = [A]_n^{-1}\bar{Y}_n \quad \bar{X}_l = [A]_l^{-1}(\bar{Y}_l - [N]_l\bar{X}_{l+1}) \quad l = 2,3,\dots,n-1, n-2,\dots,2,1 \quad 20$$

This method of solving the great linear equation system has several advantages, because it takes into account the properties of coefficient matrix, instead of the inversion of  $[Q]$  coefficient matrix (with  $4mn*4mn$  elements) it reduces the problem for inverting  $n$  times  $[A]_l$  (with  $4m*4m$  elements), and the result of inversion can be used if the aim is the determination of EM fields for other type of source or for a new source position.

A Fourier transzformált csapásirányú komponensek ismeretében a Fourier transzformált nem csapásirányú EM térkomponensek a két polarizációra megadott komponens egyenletekből számíthatók a forrásmentes térrészre. TE módusznál a pontszerű adódipólust magában foglaló (vagy a csapásirányú adódipólus felezőpontján átmenő) csapásirányra merőleges síkban  $E_x$  mellett  $H_y$  és  $H_z$  lesz zérustól különböző.  $E_x$  Fourier transzformáltját a megfelelő parciális diff. egyenletrendszer ( $J_{sx}$  az inhomogén tag) numerikus megoldása adja, míg a forrástag nélküli TE2 és TM3 egyenletekből  $H_y$ , míg TE3 és TM2 egyenletekből  $H_z$  Fourier transzformáltja határozható meg:

$$\tilde{H}_y = \frac{-\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z}}{(1 - k_x^2/k^2)j\omega\mu} - \frac{ik_x}{k_x^2 - k^2} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y}$$

$$\tilde{H}_z = \frac{\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y}}{(1 - k_x^2/k^2)j\omega\mu} - \frac{ik_x}{k_x^2 - k^2} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z}$$

Szembetűnő a formai hasonlóság, az eltérés a parciális deriváltakban, ill. a jobb oldalon lévő első tag előjelében van.

TM módusz esetén az adó dipólust magába foglaló síkban  $E_y$  mellett  $H_x$  és  $E_z$  lesz zérustól eltérő. A csapásirányú mágneses térkomponens Fourier transzformáltja a csapásirányra merőleges elektromos dipólus gerjesztést feltételező diff. egyenletrendszer megoldása során adható meg. A TE3 és TM2 egyenletekből  $E_y$ , míg a TE2 és TM3 egyenletekből  $E_z$  Fourier transzformáltját lehet kifejezni.

$$\tilde{E}_y = \frac{\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z}}{(1 - k_x^2/k^2)\sigma} - \frac{ik_x}{k_x^2 - k^2} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y}$$

$$\tilde{E}_z = \frac{-\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z}}{(1 - k_x^2/k^2)\sigma} - \frac{ik_x}{k_x^2 - k^2} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z}$$

Annak érdekében, hogy a tértartománybeli értékeket megkapjuk, a hullámszám tartományból a tértartományba való visszatéréshez inverz Fourier transzformációt használunk:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(k_x, y, z) e^{ik_x x} dk_x$$

Itt a jelölés ugyanaz, mint a Fourier transzformáció definíciójánál. Ha a modellezést az adódipólust magába foglaló csapásirányra merőlegesen végezzük el, azaz az  $x=0$  síkra, akkor a transzformáció egyszerűsödik.

Mivel mind a három zónában az EM tér elektromos és mágneses térkomponensek gyengülése  $r^{-3}$  és/vagy  $r^{-2}$  - val arányos ezért az impedancia ( $Z$ ) abszolút értékére vonatkozó kifejezésben a távolságfüggés részben kiesik és azt várjuk, hogy az inhomogén szerkezetek sokkal jobban leképeződnek, mint csupán az EM térerősség komponensek használatakor.

A TE impedancia abszolút értéke:

$$|Z_{TE}| = \frac{|E_x|}{|H_y|} = \frac{\left| \int_0^{k_x \max} \tilde{E}_x dk_x \right|}{\left| \int_0^{k_x \max} \left[ \frac{\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z}}{(k_x^2/k^2 - 1)i\omega\mu} - \frac{ik_x}{k_x^2 - k^2} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} \right] dk_x \right|}$$

TM impedancia abszolút értéke:

$$|Z_{TM}| = \frac{|E_y|}{|H_x|} = \frac{\left| \int_0^{k_x \max} \left[ \frac{\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z}}{(1 - k_x^2/k^2)\sigma} - \frac{ik_x}{k_x^2 - k^2} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} \right] dk_x \right|}{\left| \int_0^{k_x \max} \tilde{H}_x dk_x \right|}$$

Ezek a formulák azért hasznosak, mert az impedancia amplitúdó távolság függése korántsem olyan mértékű, mint az egyes komponensek távolság szerinti csillapodása. Az impedancia

fázisát az MT 2D esetről megadott módon számítjuk. Az impedancia fázisa pedig ugyanazt az információt hordozza a távoli zónában a dipólus gerjesztésnél, mint az MT 2D-s fázis érték, ugyanakkor az átmeneti zónában is van frekvenciális függés, ellentétben a közeli zónával.

A szigorúan 2D –s inhomogenitásokat feltételezve a MT –nél a  $H_z$  komponens a csapásirányú elektromos tér dőlés irányú változása hozza létre. Itt az összefüggés összetettebb. A dipólus elektromágneses terét első lépésben a Fourier transzformált térben számítjuk. A tértartománybeli  $H_z$  térkomponens inverz Fourier – transzformációval adható meg, a következő módon [Pethő (1995)]:

$$H_z(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y}}{(1 - k_x^2/k^2)i\omega\mu} - \frac{ik_x}{k_x^2 - k^2} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} \right] e^{ik_x x} dk_x$$

Ez az inverz transzformáció az adódipólust magába foglaló  $x = 0$  síkban egyszerűsödik. Így a  $H_z(0, y, z)$  komponensre írható:

$$H_z(0, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y}}{(1 - k_x^2/k^2)i\omega\mu} - \frac{ik_x}{k_x^2 - k^2} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} \right] dk_x$$

A dőlésirányú elektromos dipólusforrás esetén a  $H_z(0, y, z)$  komponens 2D –s inhomogenitásokra zérus lesz a gerjesztő elektromos dipólus forrást magába foglaló vertikális síkban. A fenti formula alapján állítható, hogy minél távolabb van a megfigyelési hely a csapásirányú elektromos dipólus forrástól, vagy adott adó – vevő távolság mellett minél nagyobb frekvencián mérünk, annál inkább a 2D-s MT –nél megismert összefüggés válik dominánssá, ugyanis az integrandusz szögletes zárójelében lévő második tag elhanyagolhatóvá válik. Jelen esetben mivel az átmeneti zónában is modellezünk a csapásirányú mágneses tér vertikális irány szerinti változása is befolyásoló tényező. Annak érdekében, hogy az inhomogenitás hatását kiemeljük itt (TE módus) célszerű a normált  $H_z$  amplitúdó eloszlást megadni.  $H_z$  fázisa - mely a korábbiakhoz hasonlóan a képzetes és valós rész hányadosának arctan-se – függ az adódipólustól való távolságtól, ezért itt is célszerű elvégezni a homogén esetre történő normálást. Ez itt különbségi fázis értékek megadását jelenti.