

MIKOVINY SÁMUEL FÖLDTUDOMÁNYI DOKTORI ISKOLA

A Doktori Iskola vezetője:

Dr. DOBRÓKA MIHÁLY

egyetemi tanár

**MÓDSZERFEJLESZTÉS A SORFEJTÉSES INVERZIÓ
TERÜLETÉN LOKÁLISAN 1D ELŐREMODELLEZÉSSSEL**

DOKTORI (PHD) ÉRTEKEZÉS

Írta:

KAVANDA RÉKA

Tudományos vezető:

DR. GYULAI ÁKOS

egyetemi tanár

Társ témavezető:

DR. ORMOS TAMÁS

egyetemi magántanár

Miskolci Egyetem

Geofizikai Tanszék

Miskolc

2015.

TÉMAVEZETŐI AJÁNLÁS

KAVANDA RÉKA

„MÓDSZERFEJLESZTÉS A SORFEJTÉSES INVERZIÓ TERÜLETÉN LOKÁLISAN 1D ELŐREMODELLEZÉSEL”

című doktori (PhD) értekezéshez

Az értekezésben a Jelölt lokálisan 1D előremodellezést alkalmazó inverziós eljárások alkalmazhatóságát vizsgálja laterálisan inhomogén szerkezet fölött, dőlés irányú terítésben mért adatok feldolgozása terén. Vizsgálatainak fő motivációja az inverziós eljárások hozzáigazítása a geoelektromos mérési gyakorlatot az utóbbi években meghatározó jelentőségű multielektrodás mérési rendszerekhez. Az ismert 1.5D inverziós módszer fejlesztése céljából vizsgálta új bázisfüggvények (Legendre és Csebisev polinomok) bevonási lehetőségét az eljárásba.

Numerikus vizsgálatokat végzett a - korábban csapásirányú mérésekhez tervezett - általánosított sorfejtéses eljárás módosítási lehetőségének céljából, hogy az alkalmas legyen dőlés irányú terítések hatékony feldolgozására is. A diszkretizációt Fourier sossal, Legendre és Csebisev polinomokkal valósította meg. Az integrációs intervallum vizsgálata során megállapította, hogy a különböző mélységű réteghatárok esetén más-más integrációs intervallum választása szükséges. Vizsgálataival igazolta, hogy az általánosított sorfejtéses eljárás a 1.5D inverzióval azonos értékű paraméterbecslést ad eredményül a dőlésirányú szelvényeken mért adatok esetén is.

Bevezette a súlyozott integrálközép eljárást, mely egy exponenciálisan lecsengő súlyfüggvény bevezetésével figyelembe veszi, hogy az integrálközép számításában a középponttól távolodva az oldal irányú érzékenység csökken. Igazolta, hogy az eljárás a 1.5D inverziónál, illetve az integrálközép módszerénél jobb paraméterbecslést eredményez mind a Fourier sossal, mind a Legendre illetve Csebisev polinomokkal diszkretizált dőlésirányú szelvények inverziós feldolgozása során. Vizsgálatait kiterjesztette terepi mérési adatrendszerre is.

Lokálisan 1D előremodellezést alkalmazva vizsgálatait kiterjesztette szignifikánsan kétdimenziós laterálisan változó modellre is. A modellen a 1.5D, az integrálközép és a súlyozott integrálközép eljárásokkal végzett inverziós futtatások műszakilag elfogadható eredményt adtak. Figyelembe véve, hogy a számítási idő néhányszor tíz másodperc, a Jelölt rámutatott, hogy a szigorúan 2D inverzióhoz képest a kisebb pontosságot a gyorsaságbeli tekintélyes különbség messzemenően kompenzálja a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából.

Az értekezés jól felépített, megfogalmazása világos, magába foglalja a jelölt legfontosabb kutatási eredményeit. A témavezető megítélése szerint a munka figyelemre méltó új tudományos eredményeket tartalmaz.

Tudományos munkában való folyamatos részvétele, szorgalma, és az értekezésben bemutatott eredmények igazolják a Jelölt magas színvonalú tudományos ismereteit és az önálló kutatómunkára való alkalmasságát. Kijelenthető, hogy a Jelölt a tudományos kutatásra való alkalmasság, valamint a gyakorlatias szemlélet igen előnyös összhangját képes megvalósítani. A doktori értekezésben foglalt új tudományos eredmények a geoelektromos adatok feldolgozása és értelmezése terén fontos előre lépést valósítanak meg.

Kijelentem, hogy az értekezés hiteles adatokat tartalmaz, a dolgozat minden vonatkozásban megfelel a Mikoviny Sámuel Földtudományi Doktori Iskola által megkövetelt tartalmi és formai követelményeknek.

Fentiek alapján a PhD cím odaítélését támogatom és javaslom.

Miskolc, 2015. december 10.

Dr. Gyulai Ákos

egyetemi tanár

a műszaki tudomány doktora

Summary

One of the most interesting problems in the environmental work is the determination of the vertical and lateral inhomogeneities. Two dimensional (2D) near-surface geological structures can be effectively investigated with geoelectric methods. In the last two decades the development of the measuring and computing technics brought significant changes in the geoelectric measurement practice. In several cases the traditional measuring systems have been replaced with the computer controlled multielectrode method. The investigation of geological structures can be solved with only one setting with this equipment. The measurement layout is usually parallel with the dip-direction.

In case of the inversion technics the time of calculation is influenced by the applied method in the forward modeling process. In case of the 2D model the 2D forward modelling and inversion technique would be the ideal method but this solution takes long calculation time that is disadvantageous in the engineering practice. The researchers look for quicker possibilities. Frequently applied technique is the simplification of the forward modeling, for example applying 1D direct problem in the approximate inversion on 2D model. In 1996 Dobróka, introduced the series expansion-based inversion to determine the parameters of the model. The main idea of series expansion-based inversion is to describe thickness and physical parameters of the layers along the profile with proper functions expanded into series to join the models along the profile and increase the overdetermination of the inverse problem. Based on this idea the 1.5D function inversion was developed by Gyulai & Ormos (1997, 1998, 1999). This method apply functions expanded into series and use locally 1D forward modeling on the VES measurement points to estimate the model parameters (thickness, resistivity) of the 2D geological structure.

In this study, I used symmetrical and asymmetrical models to test the developed methods and field data to prove the feasibility in practice.

At first I investigated the applicability of the 1.5D function inversion method in dip-direction measurement array and I further developed the procedure to increase the stability and accuracy of the inversion process. Furthermore I introduced two new basis functions (Legendre-, and Chebishev-polynomials) to enhance the stability of the inversion algorithm.

I improved the Generalized Expansion method (Kis 1998) in order to make the technique feasible in multielectrode measurements. The method uses the integral mean of

the thickness function below the measurement lines instead of the local thickness values. I determined the covariance and correlation matrix in this situation. Furthermore I investigated the integration interval in case of the layer borders in different depths. I introduced the Fourier-series and Legendre-polynomials as basis functions in the inversion process.

I developed the Weighted Integral Mean method that applies weights during the calculation of the integral mean of the thickness function to increase the accuracy of the inverse modeling. In case of this procedure I determined the covariance and correlation matrix. I investigated the optimal parameter of the weighting function. I proved the applicability of the new technique on 2D synthetic model and also on field data.

I proved that the application of the modified Integral Mean and the enhanced Weight Integral Mean methods reduces the calculation time in inverse modeling with proper accuracy. These inversion techniques could be advantageous in the processing of the field data.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	1
2. A geofizikai inverzió rövid áttekintése	4
2.1 Az inverzió eredményét minősítő paraméterek.....	7
3. Új sorfejtéses inverziós eljárások fejlesztése	9
3.1 A 1.5D inverziós eljárás továbbfejlesztése.....	12
3.1.1 Új bázisfüggvény rendszerek bevezetése a 1.5D inverziós eljárásba.....	24
3.1.1.1 Legendre-polinomok bevezetése a 1.5D inverziós eljárásba.....	24
3.1.1.2 Csebisev-polinomok bevezetése a 1.5D inverziós eljárásba	30
3.2 Az általánosított sorfejtéses eljárás továbbfejlesztése dőlésirányú szelvényadatok esetén....	36
3.2.1. Az általánosított sorfejtéses eljárás továbbfejlesztése Fourier soros diszkretizálással... 41	
3.2.2. Az általánosított sorfejtéses eljárás továbbfejlesztése Legendre -polinomos diszkretizálással.....	43
3.2.3. Az általánosított sorfejtéses eljárás továbbfejlesztése Csebisev-polinomos diszkretizálással.....	45
3.3 Súlyozott integrálközepes módszer alkalmazása dőlés irányú terítés esetén	48
4. A lokálisan 1D közelítés pontossága 2D modellen	59
5. A súlyozott integrálközep módszer tesztelése terepi adatokon	62
Összefoglalás.....	64
Irodalomjegyzék.....	67
Függelék	71
A modell.....	71
B modell.....	72
C modell.....	73

1. Bevezetés

Napjaink környezetvédelmi problémák és a növekvő nyersanyagigény egyre nagyobb kihívás elé állítja a kutatókat. A nyersanyagot egyre bonyolultabb földtani környezetből kell kitermelni, a szennyezés felderítését, a szennyező források lehatárolását gyorsan és pontosan kell végrehajtani, ezért szükséges a mérési módszerek fejlesztése mellett az értelmezési eljárások pontosságát is növelni és a becslési eredményeket minősíteni.

A mérés- és számítástechnika fejlődése az elmúlt egy-két évtizedben jelentős változást hozott a geoelektromos mérési gyakorlatban is. Ennek következtében a hagyományos mérési rendszereket a multielektródás rendszerek váltották fel. E rendszer jellemzője, hogy egy-egy mérési vonal mentén a terítésben egyszerre nagyszámú elektródát telepítenek, majd mind az áram- és mérőelektródák kiválasztását, mind pedig a mérést számítógépi vezérléssel végzik. A mérési elrendezést számítógépes program segítségével lehet kiválasztani és a detektált mérési adatrendszer digitális formában tárolódik, mely így más eszközökre is átvihető. Sok esetben a mérést vezérlő számítógépben a feldolgozás is elvégezhető, így a mérőrendszer fejlődésével párhuzamosan megjelentek az adatok kiértékelését, értelmezését szolgáló feldolgozó szoftverek is (pl. Loke és Barker, 1996). A multielektródás mérés nagy gyakorlati előnye a pontonként mért VESZ-el szemben, a gyorsaság, mivel így a földtani szerkezet vizsgálata akár egyetlen terítéssel is megoldható lehet, hiszen az biztosíthatja az összes mérési adat egyidejű összegyűjtését. A multielektródás rendszerek elterjedése szükségessé tette az inverziós eljárások fejlesztését is.

Az inverziós eljárás számítási idejét döntően befolyásolja az előremodellezésben alkalmazott módszer. Kezdetben a direkt feladat megoldása, majd az inverziós kiértékelés 1D (egydimenziós) modell feltételezésével történt. A vertikális elektromos szondázás direkt, és inverz feladatait a szakirodalom részletesen tárgyalja (Meskó 1976, Menke 1984, Tarantola 1987, Lines és Treitel 1984, Inman 1975, Inman és szerzőtársai 1975, Koefoed 1979, Salát és szerzőtársai 1982, Salát és szerzőtársai 1992). A számítógépek elterjedésének és fejlesztésének köszönhetően egyre igényesebb modellszámítások és inverziós módszerfejlesztések történtek. A gazdaságosan alkalmazható inverziós eljárások korlátját mégis a számítási idő jelenti. 2D szerkezetek esetén az ideális feldolgozási mód a 2D előre modellezés és 2D inverziós módszer alkalmazása lenne, azonban ez az eljárás nagy számítási

időt (órák, napok) igényel, ami a mérnöki gyakorlat számára kedvezőtlen. A gyakorlat ennél gyorsabb megoldást kíván, ezért a kutatók gyorsabb, rendszerint közelítő eljárásokat kerestek. Egyik ilyen gyakran alkalmazott eljárás az előre modellezés egyszerűsítése, pl. 1D direkt feladat megoldás alkalmazása 2D modelleken végzett (közelítő) inverzióban. Ennek egy továbbfejlesztett változata az ún. „stich together” technika, amikor az adott pont (1D) kiértékelésének eredményeit, mint startmodellt használjuk fel a következő pontbeli számításnál. Ezáltal, mintegy összefűzzük az 1D-s kiértékeléseket.

Az 1D modellek összekapcsolását Christiansen és Auken (2004) laterális kényszerfeltétel alkalmazásával hajtották végre (pl. két szomszédos modell eltérésére szabva korlátot). 1997-ben Dobróka M. akadémiai doktori értekezésében lokálisan 1D előremodellezést használva a modellparaméterek laterális koordináták szerinti sorfejtését alkalmazta diszkretizációs eljárásként, így teremtve kapcsolatot az egyes modellek között. Ekkor az inverzió ismeretlenjeinek a sorfejtési együtthatók tekinthetők, amelyek a modell teljes laterális kiterjedésén azonosak.

A Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszékén több évtizedre visszatekintő - mind hazai, mind nemzetközi szinten sikeres - kutatási irány a földtani modell paramétereinek sorfejtéses diszkretizációja és a sorfejtési együtthatókra megfogalmazott inverziós módszerfejlesztés. Gyulai és Ormos (1997, 1998, 1999) a 2D modell vastagság függvényeit, illetve a fajlagos ellenállásokat Fourier sorba fejtve diszkretizálták és a sorfejtés együtthatóira fogalmaztak meg inverziós eljárást, melyet 1.5D geoelektromos inverziós eljárásnak neveztek el. Ez a módszer lokális 1D előre modellezést (direkt feladat) alkalmaz a 2D modellnek a szondázási ponton átmenő vertikális síkkal való metszetében értelmezett vastagságokkal és fajlagos ellenállásokkal. Az eljárás gyorsasága és stabilitása miatt jól alkalmazhatónak bizonyult gyakorlati feladatok megoldásában. Később Gyulai és szerzőtársai (2010) a 1.5D inverzióból kiinduló új módszerre tettek javaslatot. Az ún. kombinált inverziós eljárásban (CGI) a dőlésirányú terítésben mért adatrendszer 2D feldolgozását tüzték ki célul, melyet Loke és Barker (1996) által multielektrodás rendszerre kidolgozott ún. RES2DINV módszerrel is összehasonlítottak. A CGI módszer két lépésre bontható, az első lépésben a dőlésirányú szelvényeken mért adatok 1.5D inverziója szolgáltat startmodellt a második szakasz időigényes 2D inverziója számára, így jelentősen csökken az iterációk száma és ezzel a számítási idő.

A 1.5D inverzió továbbfejlesztésével foglalkozott laterálisan inhomogén szerkezeten mért csapás irányú terítések esetében Kis (1998) PhD értekezésében. Vizsgálataiban az 1D előremodellezést a vastagságfüggvények integrálközepével definiált modellparaméterekkel

végezte és igazolta, hogy az előremodellezést végrehajtva pontosabb közelítést kaphatunk. A sorfejtéses inverzió keretében súlyfüggvényre ortogonális Csebisev-polinomokat alkalmazott, melyek nagyobb inverziós stabilitást és jobb paraméterbecslést eredményeznek. A módszert együttes inverzióra is kiterjesztette és vizsgálatot végzett szeizmikus és geoelektromos adatok együttes kiértékelésére vonatkozóan (Kis, 2002).

Dobróka és Turai (2001, 2002) időtartományban mért indukált polarizációs (GP) adatok TAU transzformációjának egzakt megoldására dolgozott ki sorfejtéses inverziós eljárást, melyet számos hazai mérési területen alkalmaztak. 2013-ban Dobróka és szerzőtársai sorfejtéses inverziós eljárást dolgoztak ki magnetotellurikus adatok feldolgozása céljából.

Szintén hasonló elven alapszik a Geofizikai Tanszéken mélyfúrési geofizikai adatok inverziós értelmezésére kidolgozott intervallum inverziós módszer is (Dobróka M. 1995, Dobróka és Szabó 2005, Dobróka és Szabó 2010), melynek fejlesztésével foglalkozott Szabó (2004) PhD doktori értekezésében. Később az eljárás javítása érdekében statisztikai módszerek bevonásával végzett vizsgálatot Szabó, Dobróka és Kavanda (2013).

Napjainkban a sorfejtéses geoelektromos inverzió legfontosabb fejlesztési iránya a 2D/3D szerkezetek vizsgálatát szolgáló közelítő (pl. 2.5D) inverziós eljárások fejlesztése. Azonban e módszerek jelentős számítási igénye gyakorlati szempontok alapján indokoltá teszi a 1.5D inverziós eljárás továbbfejlesztését is. Mivel „lassan változó geológiai szerkezetek” esetében a módszer előnyösen alkalmazható, továbbá a 2D (2.5D) szerkezetek esetében a kombinált inverziós eljárásokban a 1.5D módszerrel optimális startmodellt generálhatunk. Ennek köszönhetően a második lépésként végrehajtott 2D vagy 2.5D inverzióban csak néhány iterációra van szükség az optimális illeszkedés eléréséhez, így az erre fordított számítási idő csökkentésével gyorsíthatjuk az eljárást. Mindezek indokolják az 1.5D, ill. egyéb, lokálisan 1D előremodellezést alkalmazó inverziós módszerek fejlesztését.

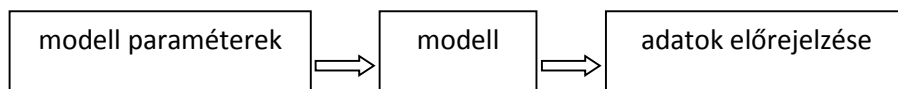
A dolgozat keretében végzett kutatásaim célja, hogy a lokálisan 1D előremodellezést alkalmazó sorfejtéses geoelektromos inverziós eljárások (1.5D illetve általánosított sorfejtéses inverzió) pontosságát és stabilitását növeljem. Segítségükkel a mérési vonal alatt változó paraméterrel rendelkező 2D szerkezet esetén, a multielektrodás rendszerekkel mért (akár dőlésirányú) terítés adatainak feldolgozása is megvalósítható legyen, elfogadható pontossággal. Továbbá vizsgálom újabb ortogonális, illetve ortonormált bázisfüggvények bevonásának lehetőségét az 1D előremodellezést alkalmazó sorfejtéses inverziós eljárásokba, amivel tovább növelhető az inverzió stabilitása és a paraméterbecslés pontossága.

2. A geofizikai inverzió rövid áttekintése

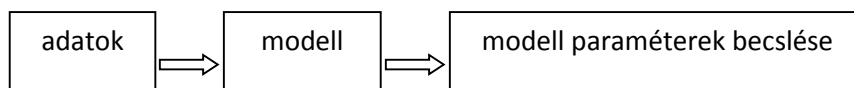
A geofizikai inverzió egy idealizált földtani modellen számított adatsor és az aktuális mérési adataink egymáshoz illesztése.

A modell a vizsgált környezetet jeleníti meg részleges matematikai absztrakcióval. A modellválasz az ezen számított szintetikus adatokat tartalmazza, mely így csak részben tükrözi a reális modellt. Az inverzió célja, hogy megbecsülje a modellparamétereket a vizsgált adatokra illesztett modellválasz segítségével. A modell paramétereit az algoritmus változtatásával finomítjuk, amíg a mért és a modellen számított adataink közötti eltérés megfelelően kicsi lesz, azaz, amíg az elfogadható közelítést elérjük.

Direkt feladatnak a mérési adatok előrejelzésének folyamatát nevezzük (Menke 1984).



Az inverz feladat lényegében a földtani információ mérési adatokból való kinyerésének módszere, amely során a mérési eredményeket használjuk a valódi modellparaméterek becslésére (Tarantola 2005).



Az inverz probléma a meghatározandó paraméterek és a rendelkezésre álló adatok egymáshoz való aránya szerint lehet **túlhatározott**, **alulhatározott** és **kevert** határozottságú is.

A túlhatározott feladatokban a rendelkezésre álló adatok (pl. mélyfúrási geofizikai szelvényadatok) száma meghaladja a meghatározni kívánt paraméterek számát. Ha az adatok hibával terhelték, ami mérési adatsorok esetén gyakori, az egyenletek ellentmondóak és nem vezetnek megoldásra. Ilyen esetekben a modell paramétereit szélsőérték kereső eljárásokkal közelítjük pl. úgy, hogy a paraméter vektort a mért és számított adatok eltérésvektorából számított L_1 - vagy L_2 - norma minimalizálásával határozzuk meg.

Alulhatározott inverz probléma esetén a meghatározandó paraméterek számához képest kevesebb mérési adattal rendelkezünk, ekkor megjelenik a többértelműség és

végtelen sok megoldást kapunk eredményül. Egyértelmű megoldást valamilyen (rendszerint nem-fizikai, többnyire önkényes) segédfeltétel rendszer előírásával kaphatunk. Gyakori az egyszerű megoldás elve szerinti megoldás, ekkor a modellparaméter-vektor L_2 -normáját minimalizáljuk.

A geofizikai inverzió során gyakran találkozunk kevert határozottságú feladattal, amikor egyes meghatározandó paraméterekre nézve túlhatározott lesz az eljárás, míg más ismeretlenek esetében alulhatározott. Ilyen esetekben is fellép a többértelműség. Megoldást rendszerint az eltérésvektor és a paramétervektor normáinak megfelelő kombinációjának minimalizálásával keresünk.

Az inverziós eljárások minden esetben támaszkodnak a direkt feladat megoldására, ami megadja a számított (elvi) adatok és a modell közötti kapcsolatot és tartalmaz minden olyan paramétert, amely a földtani környezet jellemzésére szolgál (pl. vastagság, fajlagos ellenállás, porozitás, víztelítettség stb.). A számított adatokat tehát a direkt feladat megoldásával állítjuk elő. Az inverzió keretében pedig az előzetes földtani és egyéb rendelkezésre álló információk alapján választott startmodellből kiindulva a vizsgált adatok és a modellválasz egymáshoz illesztése alapján, iterációs lépéssorozattal határozzuk meg a becsült modellparamétereket (Menke 1984).

A mért adatok vektora

$$\vec{d}^m = [d_1, d_2, \dots, d_N]^T, \quad (1)$$

ahol N a mérési adatok számát, T a transzponálás műveletét jelenti. A fenti vektor a gyakorlatban egyazon pontbeli mélyfúrási geofizikai mérések adatait tartalmazza, amelyek lehetővé teszik a direkt feladatban szereplő mennyiségek meghatározását.

A modellparaméterek vektora

$$\vec{m} = [m_1, m_2, \dots, m_M]^T, \quad (2)$$

ahol M a modellparaméterek számát jelenti, T itt is a transzponált.

Az inverz probléma azon a feltételezésen alapszik, hogy létezik valamilyen összefüggés a számított adatok és a modell paraméterek között, amely alapján a modell létrehozható. Ezt a kapcsolatot írja le a

$$\vec{d}^{sz} = \vec{g}(\vec{m}), \quad (3)$$

modelltörvény vagy válaszegyenlet, ahol \vec{g} nem lineáris vektorfüggvény, \vec{d}^{sz} a számított adatok vektora.

Általában a mért adatok száma nagyobb, mint a meghatározandó modellparamétereké, ezért túlhatározott inverz problémát kell megoldani. Mivel az inverzióban az eltérések valamely normáját minimalizáljuk, felírjuk az \bar{e} eltérés/hiba vektort a mért és a számított (elméleti) adatvektor különbségeként

$$\bar{e} = \bar{d}^m - \bar{d}^{sz}. \quad (4)$$

A (4) egyenletben $\bar{d}^m = \{d_1^{(m)}, d_2^{(m)}, \dots, d_N^{(m)}\}^T$ a mért adatok vektora, $\bar{d}^{sz} = \{d_1^{(sz)}, d_2^{(sz)}, \dots, d_N^{(sz)}\}^T$ a számított adatok vektora.

Ha az inverz problémát lineárisnak tekintjük, az \bar{e} hibavektor az alábbi alakban adható meg

$$\bar{e} = \bar{d} - \underline{\underline{G}}\bar{m}, \quad (5)$$

ahol \bar{d} az adatok vektora, \bar{m} a modellparaméterek vektora, $\underline{\underline{G}}$ a Kernel mátrix.

A $\bar{g}(\bar{m})$ függvény azonban a modellparamétereknek általában nemlineáris függvénye, ezért az inverz feladat megoldásához először gyakran linearizálást hajtunk végre, majd a linearizált feladatot oldjuk meg. A linearizáláshoz tekintsük az \bar{m}_0 -al jelölt, a megoldástól nem túl távoli pontot a paraméterterben és közelítsük az $\bar{m} = \bar{m}_0 + \delta\bar{m}$ pontban a $\bar{g}(\bar{m})$ függvényt Taylor-sora első két tagjával

$$d_k^{sz} = g_k(\bar{m}_0) + \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial g_k}{\partial m_j} \right)_{\bar{m}_0} \delta m_j, \quad (6)$$

ahol ($k=1,2,\dots,N$). Legyen $G_{kj} = \left(\frac{\partial g_k}{\partial m_j} \right)_{\bar{m}_0}$ és $d_k^{(0)} = g_k(\bar{m}_0)$ ekkor a (6) egyenletet

$$d_k^{sz} = d_k^{(0)} + \sum_{j=1}^M G_{kj} \delta m_j,$$

vagy vektoros formában a

$$\bar{d}^{sz} = \bar{d}^{(0)} + \underline{\underline{G}}\delta\bar{m} \quad (7)$$

alakban írhatjuk fel. (Itt $\underline{\underline{G}}$ mátrix a probléma Jacobi mátrixa.)

A fenti alak figyelembevételével a (4) hibavektor

$$\bar{e} = \bar{d}^m - \bar{d}^{(0)} - \underline{\underline{G}}\delta\bar{m},$$

a $\underline{\delta\bar{d}} = \bar{d}_m - \bar{d}^{(0)}$ jelölést használva az

$$\bar{e} = \underline{\delta\bar{d}} - \underline{G}\underline{\delta\bar{m}} \quad (8)$$

kifejezést kapjuk, ami a $\underline{\delta\bar{m}}$ paraméter változásban lineáris. A (8) linearizált eltérésvektor valamely normájának minimalizálásával kaphatjuk meg az eredményt.

A legelterjedtebb közelítési mód a legkisebb négyzetek elve, a módszer matematikai koncepciójának alapjait Jackson (1972, 1979) valamint Aki és Richards (1980) foglalták össze. Minimalizáljuk a mért és számított adatok eltérésvektorának L_2 -normáját, hogy becslést adjunk a paraméter vektor elemeire

$$E_2 = \sum_{k=1}^N e_k^2 . \quad (9)$$

A számítást elvégezve a

$$\underline{G}^T \underline{G}\underline{\delta\bar{m}} = \underline{G}^T \underline{\delta\bar{d}} \quad (10)$$

normálegyenletre jutunk, amelyet megoldva a következő eredményt kapjuk

$$\underline{\delta\bar{m}} = \left(\underline{G}^T \underline{G} \right)^{-1} \underline{G}^T \underline{\delta\bar{d}} . \quad (11)$$

Ezután a paramétertér $\bar{m} = \bar{m}_0 + \underline{\delta\bar{m}}$ pontjában tovább folytatjuk az eljárást (vagyis \bar{m} lesz az új \bar{m}_0 pont, amely körül az új lineáris közelítést számítjuk) a megfelelően választott stopkritérium teljesüléséig. Így olyan iteratív eljárást alkalmazunk, amelynek minden lépésében a valódi válasz egyenletek helyett azok lineáris közelítésével dolgozunk, miközben fennáll, hogy $|\underline{\delta\bar{m}}| \ll |\bar{m}_0|$. A paramétertérben mindig az aktuális helyen számítjuk a Jakobi-mátrix elemeit, amelyek viszont az eredeti (nemlineáris) direkt feladat válaszfüggvényeinek deriváltjai. Ezáltal az eredetileg nemlineáris inverz feladat megoldását lineáris problémák sorozatának megoldásán keresztül állítjuk elő.

2.1. Az inverzió eredményét minősítő paraméterek

Az inverziós számítást hibák terhelik, melyek részben adathibák, részben az empirikus közelítéséből származó modellhibák. Az adathibák a mérési körülményekből, a mérőműszerek hibáiból erednek, e hibák az inverzió során átranszformálódnak a modelltérbe, így ezen bemenő hibák nagyságával arányos lesz a becsült modellparaméterek hibája is. Maga a modellezés szintén hibaforrás. A diszkretizáció az egyszerűsítés okán az

előremodellezést hibával terheli meg, melyet diszkretizációs hibának nevezünk. Az inverziós eljárás „gyorsítása” érdekében gyakran alkalmazunk linearizálást, ami egyrészt modellezési hibát vihet az eljárásba, másrészt pedig azzal a veszéllyel jár, hogy az inverzió során lokális minimum csapdájába kerülünk. Mindezek (és még számos további szempont) indokolják az inverziós eredményt minősítő eszközök alkalmazását.

A geofizikai módszerek modellfüggvényei és a modellparaméterek közötti kapcsolatot az ún. paraméter-érzékenységi függvények segítségével vizsgálhatjuk. (Gyulai 1989, 2001, Dobróka 1987, 1988). A paraméterérzékenységet a modellfüggvény valamely paraméter szerinti parciális differenciálhányadosként értelmezzük és leggyakrabban normált, dimenziótlantott formában használjuk. Az érzékenységi vizsgálatok a geofizikai mérések tervezésében, a kiértékelésben és az értelmezésben is fontos szerepet játszanak (Dobróka és szerzőtársai 1991).

A modellparaméterek, mint valószínűségi változók becslésének pontosságáról és megbízhatóságáról szóló ismereteket Salát és szerzőtársai (1992) foglalták össze. A hibák jellemzésére használjuk a kovariancia mátrixot, melynek elemeiből számítjuk ki a fizikai paraméterek becslési hibáját.

Az általános inverz mátrixot a Gauss-féle legkisebb négyzetek módszere esetén a következőképpen írhatjuk fel

$$\underline{\underline{M}} = (\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}})^{-1} \underline{\underline{G}}^T. \quad (12)$$

Az adattérben ismert kovariancia mátrix ($\underline{\underline{COV}}(\bar{d})$) segítségével, a paraméterbecslés pontosságát, a paramétertérben jellemző modell kovariancia mátrixot ($\underline{\underline{COV}}(\bar{m})$) a

$$\underline{\underline{COV}}(\bar{m}) = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{COV}}(\bar{d}) \underline{\underline{M}}^T \quad (13)$$

kifejezés segítségével állíthatjuk elő (Menke 1984). Ennek főátlójában a modellparaméterek varianciája áll, a főátlón kívüli elemekből pedig a modell korrelációs mátrix számítható

$$\underline{\underline{CORR}}_{ij} = \frac{COV_{ij}}{\sqrt{COV_{ii} COV_{jj}}}. \quad (14)$$

A korrelációs mátrix a paraméterek közötti kapcsolatok szorosságát jellemzi, értéke -1 és +1 között változhat. Ha a korreláció értéke zérus, a paraméterek között nincs lineáris kapcsolat, amennyiben az értéke +/- 1 közelében van, akkor erős korrelációban állnak egymással. (Sorfejtéses inverzió esetén a fenti kifejezésekkel a sorfejtési együtthatók

varianciája és korrelációja számítható ki. A modellparaméterek becslésére vonatkozó minősítő jellemzőket a hibaterjedés törvénye alapján határozhatjuk meg.)

A D adattávolság, mely a mért adatok és a becsült modellparaméterekkel számított adatok közötti relatív eltérés, a (15)-es képlettel adható meg

$$D = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{d_k^{(\text{mért})} - d_k^{(\text{számított})}}{d_k^{(\text{számított})}} \right)^2}, \quad (15)$$

ahol $d_k^{(\text{mért})}$ a mért, $d_k^{(\text{számított})}$ pedig a számított adat (Salát és szerzőtársai 1982, Menke 1984, Gyulai és Ormos 1999, Dobróka 2001). Amennyiben szintetikus adatokkal dolgozunk a modellparaméterek (felvett) értékei ismertek, ekkor bevezethetjük a modelltávolságot is

$$D_m = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{m_i^{(\text{becsült})} - m_i^{(\text{felvett})}}{m_i^{(\text{felvett})}} \right)^2}. \quad (16)$$

A varianciák és korrelációk, valamint a modell- és adattávolságok hasznos segédeszközei az inverziós eljárások minőségi jellemzésének.

3. Új sorfejtéses inverziós eljárások fejlesztése

Az inverziós eljárások fejlesztése történetileg természetes módon kapcsolódik a számítástechnika és a számítástudomány fejlődéséhez. Kezdetben a direkt feladat megoldása, majd az inverziós kiértékelés a számítástechnikai korlátok (pl. elektroncsöves számítógépek) miatt 1D modell feltételezésével történt. A számítógépek fejlődésével párhuzamosan egyre igényesebb modellszámítások és inverziós módszerfejlesztések történtek. A mai rendkívüli számítási kapacitások sem elegendőek azonban ahhoz, hogy mindig a lehetőségek felső határán oldjuk meg feladatainkat. A korlátot leginkább a számítási idő jelenti.

Kétdimenziós modell esetén ideális feldolgozási eljárás a 2D előremodellezés és 2D inverziós módszer alkalmazása lenne. Ez azonban nagyon számítási időigényes eljárás, az iteratív feladatmegoldás órákig vagy akár napokig is eltarthat. A gyakorlat ennél gyorsabb megoldást kíván (különösen a modern multielektródás mérési rendszerek vagy légi mérések esetében, ahol nagy mennyiségű mérési adat keletkezik). A kutatók ezért gyorsabb, rendszerint közelítő eljárásokat kerestek. Nemzetközi viszonylatban is elfogadott és gyakorta követett eljárás az előre modellezés egyszerűsítése, azaz pl. 1D direkt feladat megoldás alkalmazása 2D modelleken végzett (közelítő) inverzióban. Ekkor felvetődik az

1D modellek összekapcsolásának kérdése. Christiansen és Auken (2004) laterális kényszerfeltételt alkalmaztak az 1D modellek összekapcsolására. A Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszékén a modellek összekapcsolására a sorfejtéses diszkretizáció szolgál. Az erre alapozott inverziós eljárást számos gyakorlati esetre kidolgozták és alkalmazták. Ezek az előzmények adták a lehetőséget, hogy vizsgálataimmal csatlakozzak a Geofizikai Tanszék ezen igen sikeres kutatási irányához.

A következőben bemutatandó módszerfejlesztéseim e módszerek közül a lokálisan 1D előremodellezésre épülő 1.5D (Gyulai és Ormos, 1997, 1998, 1999) és az általánosított sorfejtéses (Kis, 1998, 2002) eljárásokhoz kapcsolódnak. Előbb azonban meg kell említenem egy fontos körülményt, amely az utóbbi egy-két évtizedben határozottan befolyásolta a geoelektromos mérési gyakorlatot és ehhez igazodva a módszertani fejlesztéseket. A számítógép vezérelt adatgyűjtés jelentős fejlődésen ment keresztül és ez nem hagyta érintetlenül a geofizika területét sem. A multielektrodás mérőrendszerek ma már szinte egyeduralmuk a terepi munkában. Jellemzőjük, hogy viszonylag nagyszámú elektróda telepítését igénylik egy-egy mérési vonal mentén, majd számítógépi vezérléssel történik az áram- és mérőelektrodák kiválasztása és a mérés. A mérési elrendezés program szerint választható és a mérési adatok számítógépi rendszerben tárolódnak, ahonnan megfelelő formátumban a feldolgozó számítógépbe átvihetők (sok esetben a mérést vezérlő számítógépben is történhet feldolgozás és inverzió). A mérőrendszer nagy gyakorlati (és ezáltal gazdasági) előnye, hogy akár egyetlen terítéssel a földtani szerkezet vizsgálatához szükséges összes mérési adat összegyűjthető. A multielektrodás mérési rendszerek elterjedésével párhuzamosan megjelentek azok a feldolgozó szoftverek is (pl. Loke és Barker 1996), melyekkel az adatok kiértékelhetők, ill. értelmezhetők. A mérési rendszer gyakorlati okok miatt előnyhöz juttatja azokat a módszereket, amelyek alkalmazásához pl. 2D szerkezet vizsgálatában elegendő egyetlen (akár dőlésirányú) multielektrodás terítés. (Noha változatlanul igaz az a geoelektromos szakmai ajánlás, hogy ha ismerjük a dőlés- és csapásirányt, akkor csapásirányban telepített terítéseken mért adatokból határozzuk meg a 2D szerkezet jellemzőit. Ezt a szakmai iránymutatást azonban nem gazdaságos multielektrodás rendszerrel követni, újra és újra telepítve a mérőrendszer 50-100 elektródáját.)

A multielektrodás mérőrendszerek megjelenése nem hagyta érintetlenül a Geofizikai Tanszék sorfejtéses (geoelektromos) módszereinek fejlesztését sem. PhD értekezésében Kis (1998) általánosított sorfejtéses eljárást dolgozott ki csapásirányú terítések feltételezésével. Ekkor a dőlésirányban nem túl gyorsan változó 2D modellen mért adatok jól közelíthetők

1D előre modellezéssel. A közelítés jóságát a Szerző azzal is javította, hogy – a geoelektromos mérési rendszer oldalirányú érzékenységére tekintettel - a közelítő 1D modell paramétereit egy dőlésirányban, integrációs út mentén (a mérési vonalra szimmetrikusan) felvett intervallumon számított integrálközépkel definiálta. (A következőkben az eljárást a rövidség kedvéért integrálközép módszerként is említjük.) Ezekkel a paraméterekkel 1D előremodellezést végezve dolgozott ki közelítő inverziós módszert. Az eljárás megkövetelte a 2D modell dőlés/csapásirányának ismeretét, ill. a csapásirányú terítések alkalmazását, ami az előbbiek szerint a multielektrodás mérőrendszerek gyakorlatához nem illeszkedik. Szükséges tehát az általánosított sorfejtéses eljárás alkalmazhatóságának vizsgálata olyan esetekben, amikor a csapásirány nem ismert és ezért a (multielektrodás rendszerrel terített) mérési vonal alatt a 2D szerkezet paramétereit (vastagság, fajlagos ellenállás) változhatnak, beleértve azt is, hogy a terítés esetleg éppen dőlésirányú.

Az 1.5D inverziós eljárás kidolgozása során a 2D szerkezet dőlés, ill. csapásirányának ismerete nem volt előfeltétel. Az alkalmazások során a módszer mind dőlés-, mind csapásirányban (Gyulai és Ormos 1998) mért szelvények adatainak feldolgozásában sikeresnek bizonyult. Egy későbbi publikációban Gyulai és szerzőtársai (2010) a 1.5D inverzióból kiinduló un. kombinált inverziós eljárásban (CGI) a Szerzők dőlésirányú terítésben mért adatrendszer feldolgozására javasoltak új módszert. A módszer két lépésből áll: az első lépésben a dőlésirányú szelvényeken mért adatok 1.5D inverziója szolgáltat startmodellt a második szakasz időigényes 2D inverziója számára (Gyulai Á., Kavanda R. és Ormos T. 2006). Ezáltal a futási idő a teljes 2D inverzióhoz képest jelentősen csökkenthető. A 1.5D inverziós eljárás ezzel az alkalmazással a modern 2D inverziós módszerek integráns részeként azok optimális startmodellt generáló eszközévé válhat, ami a módszer jövőbeli felértékelődéséhez is vezethet.

A sorfejtéses geoelektromos inverzió legfontosabb fejlesztési iránya a 2D/3D szerkezetek vizsgálatát szolgáló közelítő (pl. 2.5D) inverziós módszerek fejlesztése. Ennek ellenére érdemes az 1.5D inverziós eljárást fejleszteni két okból is. Egyrészt a „lassan változó geológiai szerkezetek” kutatására a gyors 1.5D inverzió előnyösen alkalmazható (a vízbázis védelemben gyakoriak az ilyen rétegzett földtani modellek). Másrészt a 2D (2.5D) kombinált inverziós eljárásokban első lépésként 1.5D eljárással generálhatunk optimális startmodellt, ami után már csak néhány iteráció szükséges az időigényes 2D vagy 2.5D inverzióból.

Mindezek figyelembe vételével indokolt a 1.5D inverziós eljárás részletes vizsgálata olyan esetben, amikor a (multielektrodás rendszerrel terített) mérési vonal alatt a 2D

szerkezet paramétereit változhatnak, beleértve azt is, hogy a terítés dőlésirányú. Emellett - ha az eljárás alapelveit nem is érinti – az inverzió stabilitása és pontossága szempontjából fontos lehet további bázisfüggvények bevonása az eljárásba, különösen a hatványfüggvényekkel történő diszkretizálás kiváltására.

A következőkben bemutatandó fejlesztéseim abból a motivációból indulnak, hogy a lokálisan 1D előremodellezést alkalmazó sorfejtéses geoelektromos inverziós eljárások (1.5D, ill. általánosított sorfejtéses inverzió) pontosságát és stabilitását növeljem, ezáltal is kiterjesztve azok alkalmazhatóságát úgy, hogy segítségükkel a multielektrodás rendszerekkel mért (akár) dőlésirányú terítés adatainak feldolgozása is megvalósítható legyen.

3.1. A 1.5D inverziós eljárás továbbfejlesztése

Ez a közelítő inverziós eljárás lokálisan 1D előremodellezést alkalmaz. A közelítés keretében a direkt feladat megoldására a becsült modell vastagság és fajlagos ellenállás adatait egy pontra, a vonatkozási pontra számítjuk és ezekkel a paraméterekkel határozzuk meg a horizontálisan rétegzett, rétegenként homogén (1D) modell látszólagos fajlagos ellenállásait különböző terítési távolságok mellett. A számításokban a felszínen elhelyezett pontelektróda potenciálját a Laplace-egyenlet megoldásával, a határ- és peremfeltételek figyelembe vételével megadó

$$U(r,0) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} K(m) J_0(mr) dm \right) \quad (17)$$

kifejezésből indulunk ki (r a pontelektródától mért távolság, J_0 a nulladrendű Bessel-függvény, m a szeparációs állandó, $K(m)$ a földtani információkat hordozó magfüggvény). A fenti egyenletből levezethető a látszólagos fajlagos ellenállás, mely Schlumberger elrendezésre nézve az alábbi egyenlettel írható le

$$\rho_a = \rho_1 \left(1 + 2s^2 \int_0^{\infty} K(m) J_1(ms) m^* dm \right), \quad (18)$$

ahol s a tápelektroda-távolság fele, J_1 az elsőrendű Bessel-függvény, m a szeparációs állandó, $K(m)$ a földtani információkat hordozó magfüggvény. Mivel az egyenlet impropius integrált tartalmaz ρ_a -t csak közelítő módszerekkel (digitális szűrés, magfüggvény számítás)

tudjuk meghatározni (Salát és szerzőtársai 1992). Az elméleti görbét konvolúcióval számíthatjuk ki Ghos (1971) szűrőelmélete alapján

$$\rho_a = \rho_1 \int_{-\infty}^{\infty} B_1(x)G(r-x)dx, \quad (19)$$

ahol G a Gosh-függvény, B_1 a határfeltételi karakterisztikus függvény, mely az irodalomból ismert formulával adható meg. Vizsgálataim során az 1D előremodellezést a Geofizikai Tanszék szoftvertárában adott programok alkalmazásával végeztem.

A 1.5D inverziós módszer (Gyulai és Ormos, 1999) keretében a 2D földtani szerkezet laterálisan változó paramétereit a Szerzők sorfejtés formájában állították elő. Bázisfüggvényként hatványfüggvényeket alkalmaztak

$$\rho_n(x) = \sum_{p=1}^P a_{np} x^{(p-1)}$$

$$h_n(x) = \sum_{r=1}^R b_{nr} x^{(r-1)}, \quad (20)$$

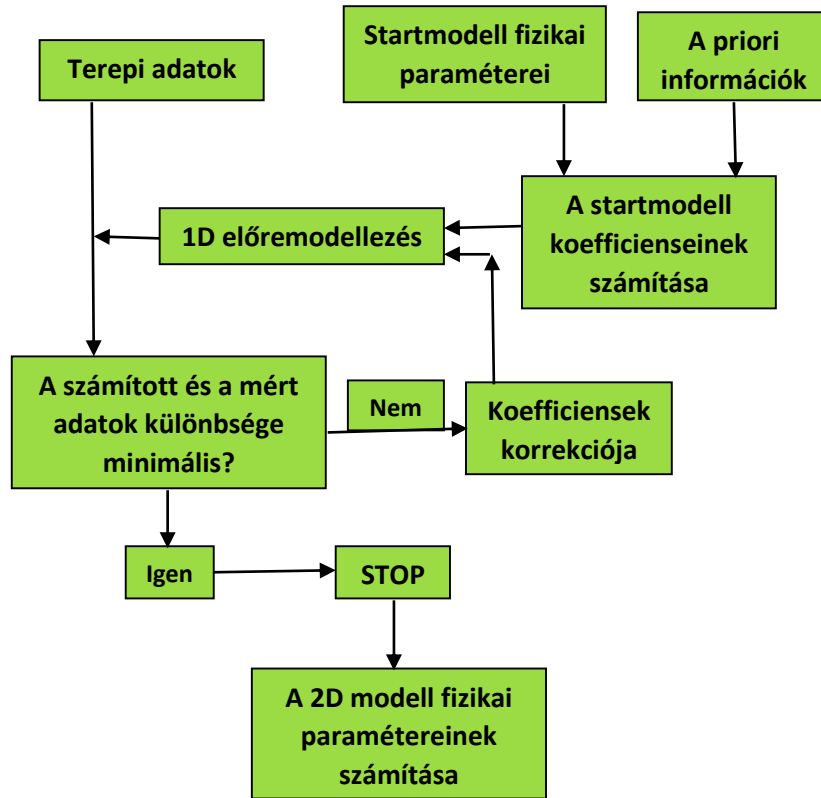
ill. ortogonális bázist képező szinusz/koszinusz függvényeket

$$\rho_n(x) = \frac{1}{2} d_{n_0} + \sum_{k=1}^K d_{n_k} \cos\left(k \frac{2\pi x}{S}\right) + \sum_{k=1}^K d_{n_k}^* \sin\left(k \frac{2\pi x}{S}\right),$$

$$h_n(x) = \frac{1}{2} c_{n_0} + \sum_{l=1}^L c_{n_l} \cos\left(l \frac{2\pi x}{S}\right) + \sum_{l=1}^L c_{n_l}^* \sin\left(l \frac{2\pi x}{S}\right) \quad (21)$$

használtak, ahol $n=1, \dots, N-1$. A $h_n(x)$ függvény az n -edik réteg vastagságfüggvénye, a_{np} , b_{nq} , d_{n_k} , $d_{n_k}^*$, c_{n_l} , $c_{n_l}^*$ a függvénykoefficiensek, N a rétegek száma, x a laterális koordináta, P , R , K , L a sorfejtési együtthatók száma.

A módszer számítási folyamata az **A1.** ábrán látható.



A1. ábra: A 1.5D inverziós eljárás blokkdiagramja

A $\bar{d}^{sz} = \bar{g}(\bar{m}) = \bar{g}(m_1, \dots, m_N)$ direkt feladat a sorfejtéses inverzióban módosul, új változóként a $B_1^{(1)}, \dots, B_{Q_1}^{(1)}, \dots, B_1^{(N)}, \dots, B_{Q_N}^{(N)}$ sorfejtési együtthatókat szerepeltetjük

$$\bar{d}^{sz} = \bar{g}(m_1, \dots, m_p) = \bar{g}(B_1^{(1)}, \dots, B_{Q_1}^{(1)}, \dots, B_1^{(N)}, \dots, B_{Q_N}^{(N)}), \quad (22)$$

ahol Q_i az i -ik rétegeparaméter sorfejtési együtthatóinak száma. . Linearizálás után a

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \delta \bar{B} = \underline{\underline{G}}^T \delta \bar{d}$$

normálegyenlet rendszert kapjuk, az inverzió eredményeként az együtthatók állnak elő. A becslést minősítő (13), (14) kovariancia és korreláció mátrixok értelemszerűen az inverzió közvetlen változóira vonatkoznak, amelyeket Menke (1984) szerint

$$\underline{\underline{COV}}(\bar{B}) = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{COV}}(\bar{d}) \underline{\underline{M}}^T$$

formában kapunk. A (22) kifejezés még nem alkalmas a normálegyenlet korábbiakban megismert előállítására, mivel a sorfejtési együtthatók mátrixok. Ezen könnyen változtathatunk az indexek átírásával, ha bevezetjük a \bar{B} sorfejtési együttható vektort, melynek i -ik rétegre vonatkozó B_i koordinátáit az

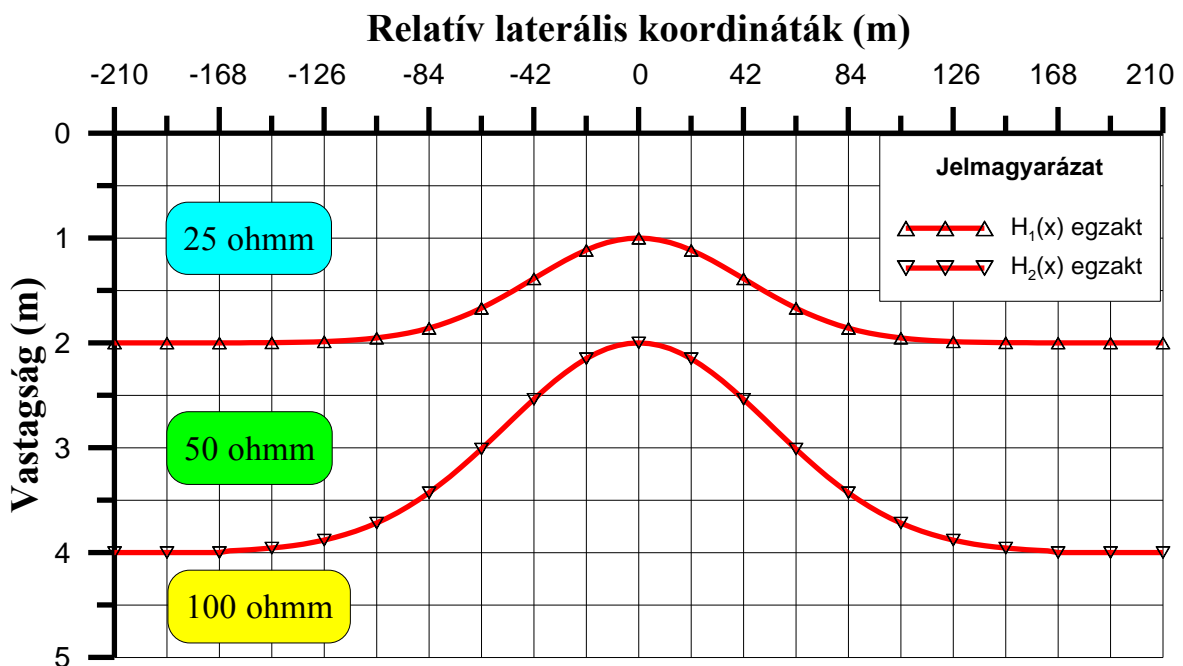
$$l = n + \sum_{p=1}^{i-1} Q_p, \quad n = 1, \dots, Q_i \quad (23)$$

képlet adja, ahol n az i -ik réteg sorfejtési együtthatóin fut végig, Q_p pedig a „korábbi” ($p < i$ indexű) rétegekben felvett együtthatók számát jelöli. Pl. 2 réteghatár esetén

$$l = \begin{cases} 1, \dots, Q_1 & (\text{első réteg}) \\ Q_1 + 1, \dots, Q_1 + Q_2 & (\text{második réteg}) \end{cases}$$

A (20), (21) bázisfüggvényekkel a 1.5D inverziós eljárást a Szerzők sikerrel alkalmazták. A numerikus és in-situ alkalmazások azt mutatják, hogy a Fourier-soros közelítés igen magasrendű lehet: a sorfejtési együtthatók száma akár a maximumig (a terítési pontok számáig) elmehet, ugyanakkor a bázisfüggvény rendszer a modellnek (kisszámú sorfejtési tag alkalmazásakor) „unduláló” jelleget ad. Ezt elkerülendő, a Szerzők hatványfüggvényeket is bevontak a bázisfüggvények közé. Ezek azonban nem alkotnak ortogonális rendszert, így alkalmazásukkal numerikus stabilitási problémák keletkezhetnek. A 1.5D módszerhez kapcsolódó első vizsgálataim ehhez a problémához kapcsolódnak.

Numerikus vizsgálataim céljára elsőként az **A2.** ábrán látható háromréteges modellt vettem fel, melynek vastagságfüggvényei lassan változnak, a fajlagos ellenállásokban a szerkezet rétegenként homogén. A látszólagos fajlagos ellenállás görbéket példa szelvényekkel a függelék **F1.** ábra mutatja be.



A2. ábra: A numerikus vizsgálatok céljára felvett **A** modell

A vastagságfüggvények a modell mindkét szélén 60 m hosszúságban állandó értéket vesznek fel ($H_1=2\text{m}$, $H_2=4\text{m}$). A ± 150 m. belső intervallumon a vastagságok laterális változását a

$$H_1(x) = 2 - \exp(-(2.5x/150)^2)$$

és a

$$H_2(x) = 4 - 2 \exp(-(2x/150)^2)$$

függvények adják. A 420 m-es vizsgálati területen dőlésirányban 15 méterenként Schlumberger elrendezésű mérést tételeztünk fel ($AB/2= 1.6, 2.0, 2.5, 3.2, 4.0, 6.4, 8.0, 10.0, 12.0, 14.0, 17.0, 20.0, 25.0, 30.0, 35.0, 40.0, 45.0, 50.0$ m terítési távolságokkal). Egy-egy mérési ponthoz tehát 19 mérési adat tartozik, a mérés teljes intervalluma 100 m. A továbbiakban a fenti modellt „**A modell**”-nek nevezzük.

A látszólagos fajlagos ellenállás adatokat Spitzer (1995) FD programjával állítottam elő, amelyet a modellszámítások megkönnyítésére Gyulai Ákos Professor fejlesztett tovább tetszőleges, laterálisan változó modellre. Az adatokkal elvégzett inverziós vizsgálatokban az eredmény minőségét jellemző paramétereket is számítottam, következtéseimet ezekre alapoztam.

A 1.5D inverziós közelítés jóságának jellemzésére számos paraméter szolgál. Ezek közül az adattérbeli és modelltérbeli távolságokat a 2.1 fejezetben definiáltuk. Jelen vizsgálataink szempontjából a legfontosabb a rekonstruált vastagság függvények és azok egzakt (a modellben felvett) értékei közötti (relatív) eltérés. Ennek számítására a relatív függvénytávolságot vezetjük be az alábbi formula szerint:

$$D_h = \int_{-1}^{+1} \frac{|H_1^{becsült}(x') - H_1^{egzakt}(x')|}{H_1^{egzakt}(x')} dx' . \quad (24)$$

A kovariancia és korreláció mátrixok kifejezései értelemszerűen az inverzió közvetlen változóira, azaz a sorfejtési együtthatókra vonatkoznak, így pl. (13) alapján

$$\underline{COV}(\bar{B}) = \underline{M} \underline{COV}(\bar{d}) \underline{M}^T .$$

A földtani modell paramétereinek kovariancia mátrixa a hibaterjedés törvénye alapján állítható elő. Numerikus vizsgálatainkban csak a vastagság laterális változásával foglalkozunk, ezért a levezetésünkben a fajlagos ellenállásokat konstansnak tételezzük fel.

Az i -ik réteg vastagságfüggvénye az x helyen $h_i(x) = \sum_{n=1}^{Q_i} B_n^{(i)} \Phi_n(x)$. Ennek várható értékét

a becslés során jelölje $\bar{h}_i(x) = \sum_{n=1}^{Q_i} \bar{B}_n^{(i)} \Phi_n(x)$, ahol a felülvonás az átlagolásra utal. Az

átlagtól való eltérés

$$\delta h_i(x) = h_i(x) - \bar{h}_i(x) = \sum_{n=1}^{Q_i} (B_n^{(i)} - \bar{B}_n^{(i)}) \Phi_n(x)$$

vagy másként

$$\delta h_i(x) = \sum_{n=1}^{Q_i} \delta B_n^{(i)} \Phi_n(x),$$

ahol $\delta B_n^{(i)} = B_n^{(i)} - \bar{B}_n^{(i)}$. A j -ik vastagságra hasonlóan $\delta h_j(x) = \sum_{m=1}^{Q_j} \delta B_m^{(j)} \Phi_m(x)$, így a

vastagság kovariancia mátrix a

$$\delta h_i(x) \delta h_j(x) = \sum_{n=1}^{Q_i} \sum_{m=1}^{Q_j} \Phi_n(x) \delta B_n^{(i)} \delta B_m^{(j)} \Phi_m(x)$$

átlagolásával kapható. Egyszerűbb formulát kaphatunk (együttható mátrixok helyett együttható vektor) az indexek (23)-hoz hasonló átírásával

$$l = n + \sum_{p=1}^{i-1} Q_p, \quad n = 1, \dots, Q_i, \quad h = m + \sum_{q=1}^{j-1} Q_q, \quad m = 1, \dots, Q_j,$$

vagyis

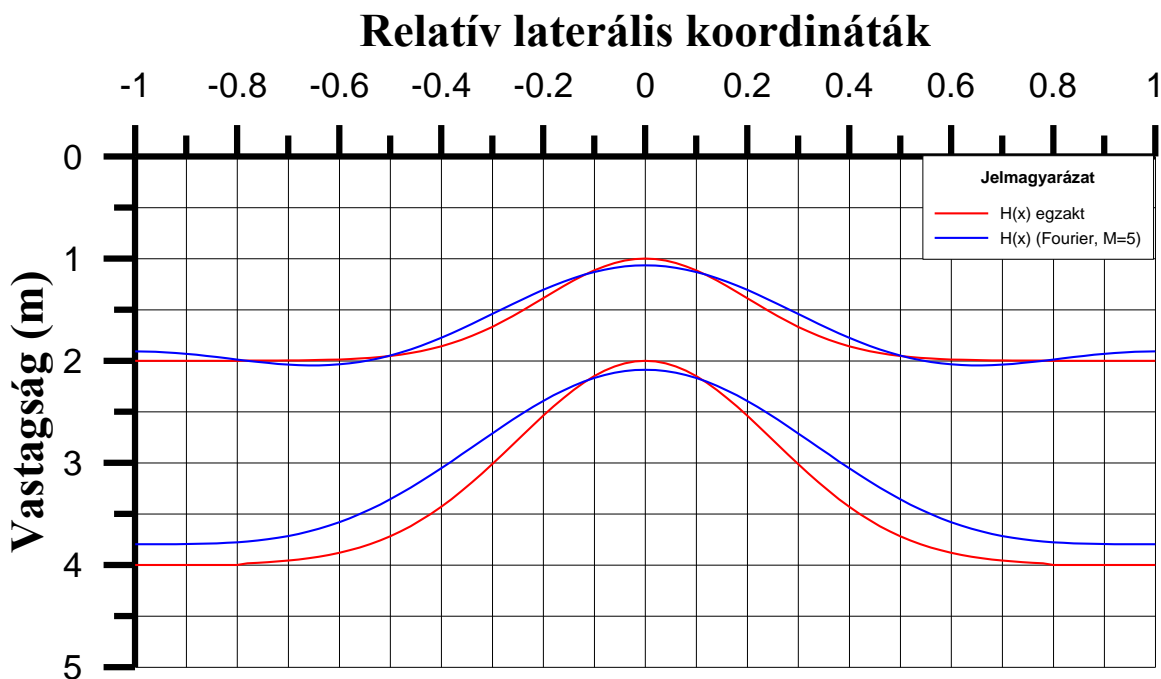
$$\overline{\delta h_i(x) \delta h_j(x)} = \sum_{n=1}^{Q_i} \sum_{m=1}^{Q_j} \Phi_n(x) \overline{\delta B_l \delta B_h} \Phi_m(x),$$

amivel a vastagság kovariancia mátrix elemei a sorfejtési együtthatók kovarianciáiból x helyen a

$$\left\{ \overline{COV(h(x))} \right\}_{i,j} = \sum_{n=1}^{Q_i} \sum_{m=1}^{Q_j} \Phi_n(x) \left\{ \overline{COV(\bar{B})} \right\}_{l,h} \Phi_m(x) \quad (25)$$

képlet szerint számíthatók. (A formula $i=j$ esetre visszaadja a Gyulai és szerzőtársai 2002) variancia képletét.) A korrelációs mátrix előállítása továbbra is a (14) egyenletnek megfelelően történik.

Mielőtt a numerikus vizsgálatainkba kezdenénk, összehasonlítási alapként nézzük meg a 1.5D algoritmus Fourier sorfejtést alkalmazó változatát. Az **A3.** ábrán öttagú ($M=5$) Fourier sorfejtést alkalmazó közelítésben mutatjuk be a 1.5D inverzió eredményét felvett modellünkön. A laterális koordinátákat későbbi numerikus vizsgálatainkra tekintettel a ± 1 intervallumba transzformáltuk. (Az adatok FD generálása mindig az eredeti skálán történik.) A rekonstruált vastagság függvényeket a kék görbék mutatják. Látható a $H_2(x)$ görbén, hogy a sorfejtési együtthatók száma még kevés a modellváltozás leírására. Az **A3.** ábrán bemutatott vastagságfüggvények esetében a (24) szerint számított $D_h = 5.864$. (Az inverzió során a rétegek fajlagos ellenállásait is meghatároztuk.)



A3. ábra: A 1.5D inverzió eredménye
(vastagság függvények közelítése $M=5$ Fourier taggal)

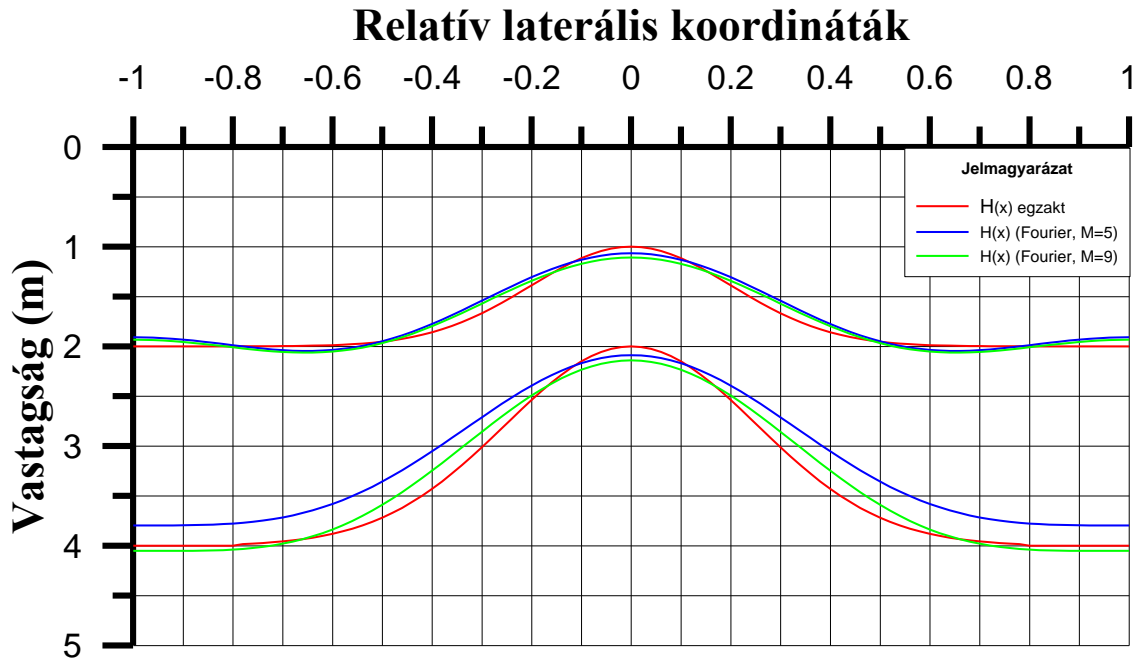
További vizsgálatokat az **A1.** táblázatban látható M sorfejtési együttható számok mellett végeztünk. (A páratlan számok oka az, hogy a Fourier-sorban szereplő konstans tag mellett azonos számban szerepelnek szinusz, illetve koszinusz függvények.) A táblázatban az egyes paraméterek becslésének pontosságát jellemző varianciák átlagát (átlagvariancia), a korrelációs mátrix főátlón kívüli elemeinek négyzetes középértékét (korrelációs átlag), az előzőekben definiált D_h függvénytávolságot és az adattávolságot mutatjuk be. Az átlagvarianciát a (25) formula alapján az egyes mérési pontokban számított varianciák középértékeként számítottuk. A korrelációs átlag a (25)-ből levezethető korrelációs mátrix alapján állt elő.

Mint látható, az adattávolság lényegében azonos, ennek változása kevésbé informatív, ezzel szemben a D_h függvénytávolság megfelelően érzékeny jellemzője a vastagságfüggvény becslés jóságának. A korrelációs átlag szisztematikusan csökken, azt jelezve, hogy az ortogonális függvények alkalmazása stabil inverziós eljárást eredményez (korreláltság nem rontja lényegesen az eredményt). A variancia átlag a becslés átlagos pontosságát mutatja, ennek értéke az ismeretlenek számának növelésével együtt növekszik.

Látható a táblázat alapján, hogy a legjobb függvényilleszkedést $M=9$ -nél kaptuk. Az **A4.** ábrán ezért a már szemléltetett $M=5$ mellett bemutatjuk az $M=9$ esetében kapott vastagság függvényeket. Az **A1.** táblázat tanúsága szerint a magasabb rendű közelítések is megfelelő (kissé pontatlanabb vastagságbecslést jelentő) eredményt adnak. Ezeket az ábrán nem tüntetjük fel, mivel az egyes eredmények szinte csak vonalvastagságon belül térnek el egymástól.

M	Variancia átlag (%)	Korrelációs átlag (-)	D_h függvénytávolság (%)	Adattávolság (%)
5	2.955	0.381	5.864	0.953
7	3.280	0.311	4.909	1.030
9	3.638	0.264	3.775	0.977
11	3.691	0.230	3.781	0.973
13	3.686	0.207	3.805	0.984
15	3.770	0.189	3.835	1.006
17	3.960	0.175	3.868	0.996
19	3.930	0.163	3.848	0.996
21	4.019	0.154	3.825	1.032
23	4.220	0.144	3.792	1.024

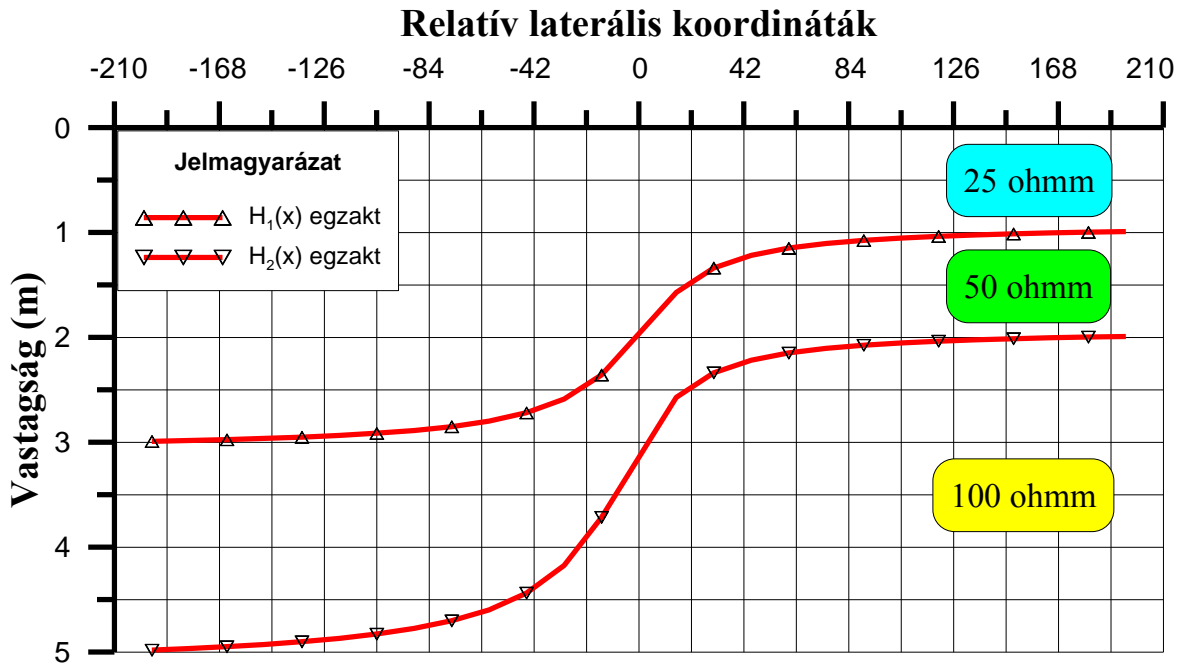
A1. táblázat: A 1.5D inverzió eredményeit minősítő jellemzők
Fourier soros diszkretizáció esetén



A4. ábra: A 1.5D inverzió eredménye Fourier sorfejtéses diszkrétizációval
M=5 és M=9 esetén

Az **A modell** az x laterális koordinátában szimmetrikus, ami inverziós szempontból előnyös, stabilitást növelő tényező. Természetesen a gyakorlatban a modell szimmetriája igen ritka, ezért további vizsgálataink céljára a **B1.** ábrán látható aszimmetrikus modellt is definiáljuk, amit „**B modell**”-nek nevezünk.

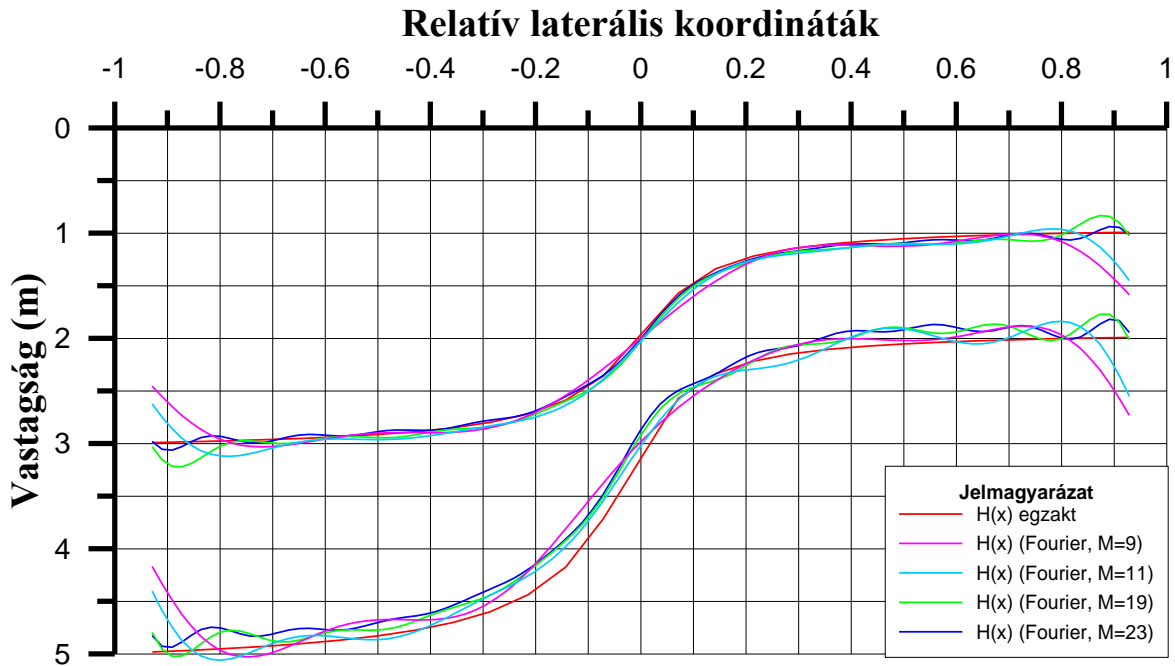
A vastagságfüggvények az $x < 0$ oldalon a $-\arctg(x)$ függvények (rétegenként különböző) eltolásával és skálázásával állnak elő. Az $x > 0$ koordinátáknál pedig az ugyancsak $\arctg(x)$ függvényeket az előbbiektől eltérő skálázással vettük fel (annak érdekében, hogy valóban aszimmetrikus és nem antiszimmetrikus modellt definiáljunk). A 420 m-es vizsgálati területen (a modell valódi mérete) dőlésirányban itt is 15 méterenként Schlumberger elrendezésű mérést tételeztünk fel ($AB/2 = 1.6, 2.0, 2.5, 3.2, 4.0, 6.4, 8.0, 10.0, 12.0, 14.0, 17.0, 20.0, 25.0, 30.0, 35.0, 40.0, 45.0, 50.0$ méter terítési távolságokkal). A rétegek fajlagos ellenállása és a mérési rendszer megegyezik az **A modell**nél leírtakkal. A látszólagos fajlagos ellenállás adatokat továbbra is Spitzer (1995) Gyulai Ákos Professzor által továbbfejlesztett FD programjával állítottam elő. A látszólagos fajlagos ellenállás görbéket példa szelvényekkel a függelék **F2.** ábra mutatja be.



Fourier-sorral történt diszkretizálással a 1.5D inverzió a **B modell**en $M=23$ mellett adta a legjobb eredményt, mint látható a **B1.** táblázatban. A **B2.** ábrán a legjobb illeszkedést mutató $M=23$ eset mellett, néhány további fokszám alkalmazásakor kapott görbét is bemutatunk, hogy a függvényilleszkedés változását szemléltessük. $M=9$ és $M=11$ esetekben a vastagság görbék szélein (fel-, ill. lefelé futó görbék) még instabilitás mutatkozik, $M=19$ felett ez jelentősen csökken. (Az **A modell** esetében ez az instabilitás a szimmetria miatt nem jelentkezik.)

M	Variancia átlag (%)	Korrelációs átlag (-)	D_h függvénytávolság (%)	Adattávolság (%)
5	11.352	0.384	15.910	2.559
7	4.497	0.364	6.466	0.888
9	4.744	0.338	6.705	0.888
11	3.116	0.321	4.862	0.547
13	3.300	0.316	5.195	0.558
15	3.389	0.311	5.603	0.508
17	2.614	0.232	5.612	0.522
19	2.478	0.249	3.581	0.377
23	2.350	0.216	3.319	0.394

**B1. táblázat: A 1.5D inverzió eredményeit minősítő jellemzők
Fourier soros diszkretizáció esetén a B modellen**

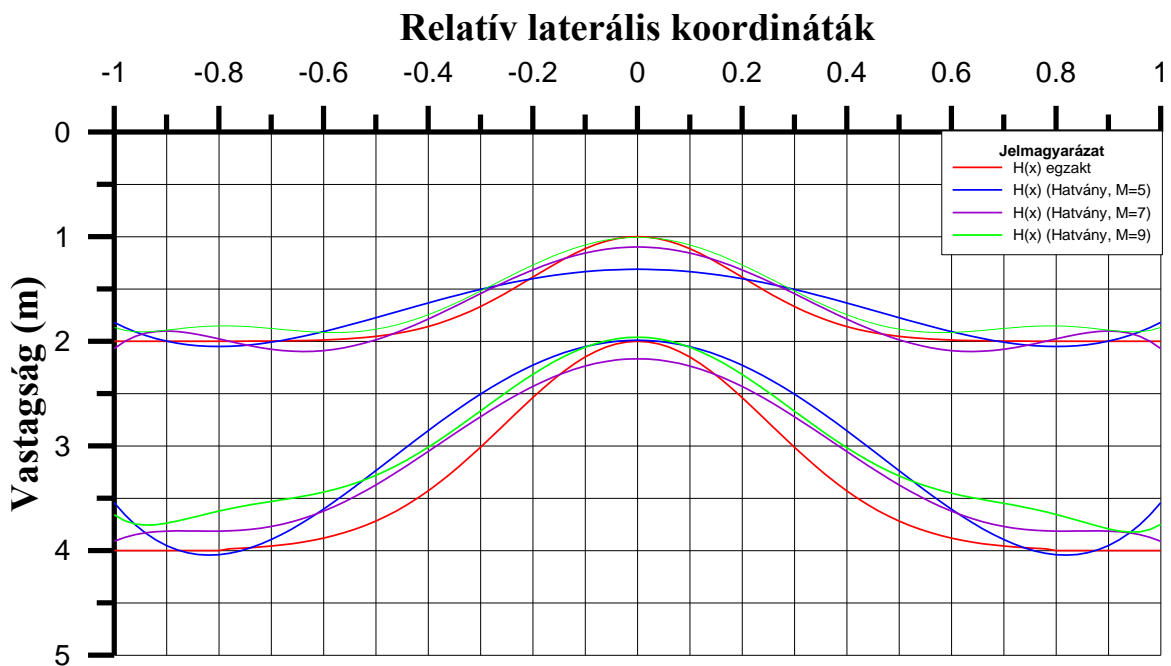


B2. ábra: A 1.5D inverzió eredménye Fourier sorfejtéses diszkretizációval

Ezek után vizsgáljuk meg az **A modellen** a vastagságok hatványfüggvényekkel történő (20) szerinti diszkretizációjának alkalmasságát a 1.5D inverzióban. Tapasztalataink szerint az ötödfokú közelítés alatt elfogadhatatlan pontosságot kapunk. Numerikus vizsgálatunkat ezért $M=5$ mellett kezdjük, azaz bázisfüggvényeink között legfeljebb ötödfokú hatványfüggvény fordul elő. A legmagasabb hatványkitevő növelésével $M=7$ -nél javulást, majd magasabb kitevőknél a közelítés romlását tapasztaltuk úgy, hogy $M=10$ -nél az inverzió numerikus instabilitás miatt megszakadt és magasabb hatványoknál sem adott eredményt. Az **A2.** táblázat az inverziót minősítő paramétereket mutatja különböző fokszámú közelítések esetén. A legjobb függvény közelítést $M=7$ mellett kaptuk. Az illeszkedés szemléltetésére az **A5.** ábra szolgál. Az áttekinthetőség kedvéért csupán az $M=5$, 7 és 9 maximális fokszámhoz tartozó görbéket mutatjuk be. Mint látható $M=5$ még viszonylag alacsony, a vastagság függvényeket gyengén közelítő eredményt hoz. Ugyanakkor az $M=9$ - hez tartozó görbe már az instabilitást jelző közelítési hibával ($D_h=7.87\%$) és 16.25% varianciaátlaggal jellemezhető. A numerikus instabilitás oka az, hogy az x^n és az x^{n+1} függvények közötti különbség (például a $[0,1]$ intervallumon egyre kisebbé válik az n növelésével, másként ez azt is jelenti, hogy nagy n -ek esetén az egymást követő bázisfüggvények csaknem megegyeznek, így a sorfejtés egyre magasabb rendű tagjai numerikusan közel azonos szerepet játszanak. Ez a körülmény a Jacobi-mátrixba olyan hasonlóságokat visz be (sorok vagy oszlopok lineáris kombinációja), amely végül az egyenletrendszer mátrixának szingularitásához (determináns közel egyenlő nulla) vezet.

M	Variancia átlag (%)	Korrelációs átlag (-)	D _h függvénytávolság (%)	Adattávolság (%)
5	10.310	0.425	10.593	2.103
6	10.310	0.440	10.593	2.103
7	18.744	0.439	5.927	1.228
8	18.837	0.452	5.927	1.228
9	16.257	0.386	7.874	0.625

A2. táblázat: A 1.5D inverzió eredményeit minősítő jellemzők hatványfüggvényekkel történt diszkretizáció esetén



A5. ábra: Az 1.5D inverzió eredménye hatványfüggvényekkel történt diszkretizációval M=5,7 és 9 hatványkitevők esetén

Mindezek alapján megállapítható, hogy a (20) szerinti egyszerű hatványfüggvények csupán korlátozott mértékben alkalmazhatók a dőlésirányú szelvények mentén mért látszólagos fajlagos ellenállás adatok 1.5D inverziójában, ezért a kérdést a **B modellen** nem vizsgáljuk. A hatványfüggvények, általánosabban polinomok szerepeltetése a modellek megfelelő leírásában szükséges, ezért a hatványfüggvények helyett a továbbiakban új bázisfüggvényeket keresünk.

3.1.1. Új bázisfüggvény rendszerek bevezetése a 1.5D inverziós eljárásba

A sorfejtéses inverzió terén ismert tény, hogy ortogonális, illetve ortonormált bázisfüggvényekkel történő diszkretizáció nagyobb inverziós stabilitást és jobb paraméterbecslést eredményez. Laterálisan inhomogén szerkezeten mért adatok általánosított sorfejtéses inverziójában Kis (1998) Csebisev polinomokat alkalmazott, amelyek súlyfüggvényre ortogonális rendszert alkotnak. PhD értekezésében Prácser (2007) Csebisev polinomokat és Haar-függvényeket alkalmazott. Doktori értekezésében Szegedi (2015) a Fourier-transzformáció sorfejtéses diszkretizáción alapuló inverziós eljárásában ortogonális Hermite-függvényeket használt. A kidolgozott inverziós eljárások figyelemre méltó stabilitást mutattak. Ezekből kiindulva választásom a Legendre-polinomokra, illetve a Csebisev-polinomokra esett, amelyek ortogonális, illetve súlyfüggvényre ortogonális rendszert alkotnak.

3.1.1.1. Legendre-polinomok bevezetése a 1.5D inverziós eljárásba

A matematikában és a műszaki tudományokban gyakorta szerepet kapó polinomok definiálása általában a Rodriguez-formulával vagy pedig rekurziós formulával történik. A Legendre-polinomok rekurziós formulája az alábbiak szerint adható meg

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

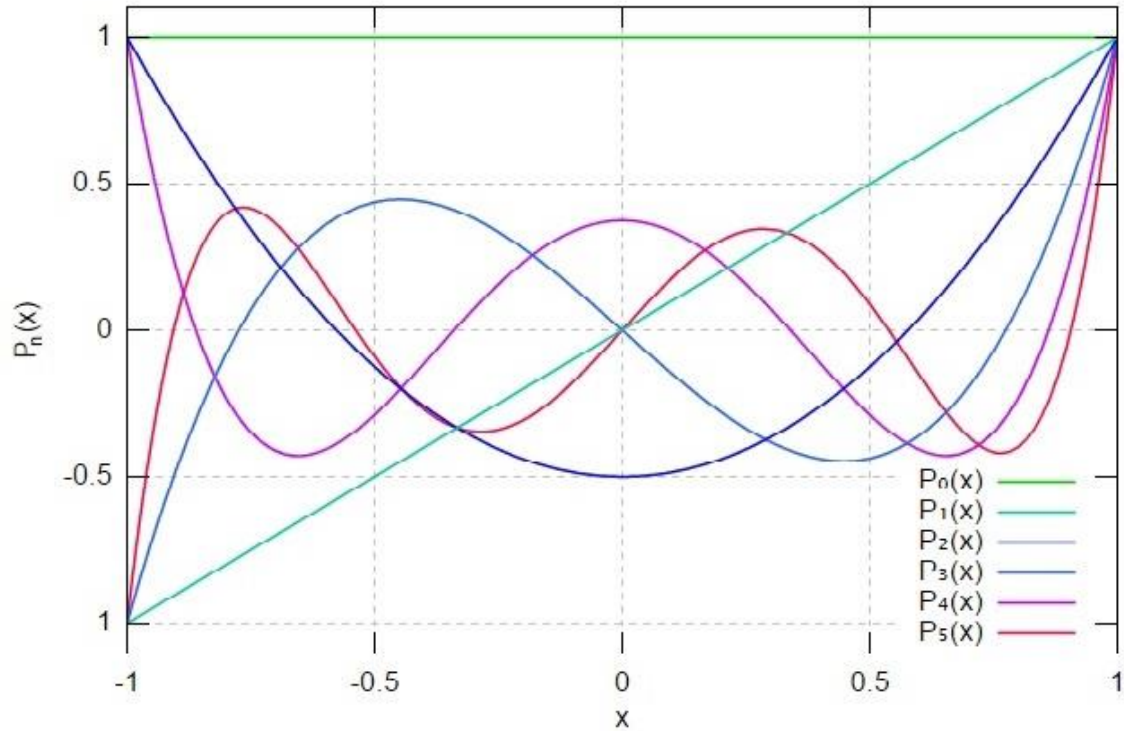
$$P_n(x) = \frac{1}{n} \{ (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x) \},$$

ahol $n \geq 2$ és $-1 \leq x \leq 1$. A függvények ortogonális rendszert alkotnak.

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm},$$

ahol $\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{cases}$. Szemléltetésükre az első öt Legendre polinomot az **A6.** ábrán

mutatom be. Látható, hogy az ortogonalitásnak köszönhetően az egymás után következő függvények lényegesen eltérnek, így elkerülhető az a probléma, amit a hatványfüggvényeknél a $[0,1]$ intervallumon a magasabb kitevők esetén a függvények hasonlóságáról említettünk.



A6. ábra: Legendre-polinomok (Forrás: Wikipedia)

Az $x = \pm 1$ pontban azonban a függvények „összefutnak”. Ez arra figyelmeztet, hogy ebben a pontban a különböző bázisfüggvények azonossága miatt a sorfejtés egyértelműsége és ezzel az inverzió stabilitása romolhat. Erre a nehézségre figyelniünk kell. A felvett laterális modellünk mindkét szélén négy mérési pontban állandó vastagságot tételeztünk fel. A Legendre-polinomokkal történő leírás emiatt csupán a ± 0.78574 intervallumon értelmezett, ahol numerikus stabilitási probléma **A6.** ábra tanúsága szerint nincs. Ezek előrebocsátása után vizsgáljuk meg a dőlésirányú szelvényeken mért adatok Legendre-polinomokkal diszkretizált 1.5D inverziójának eredményeit.

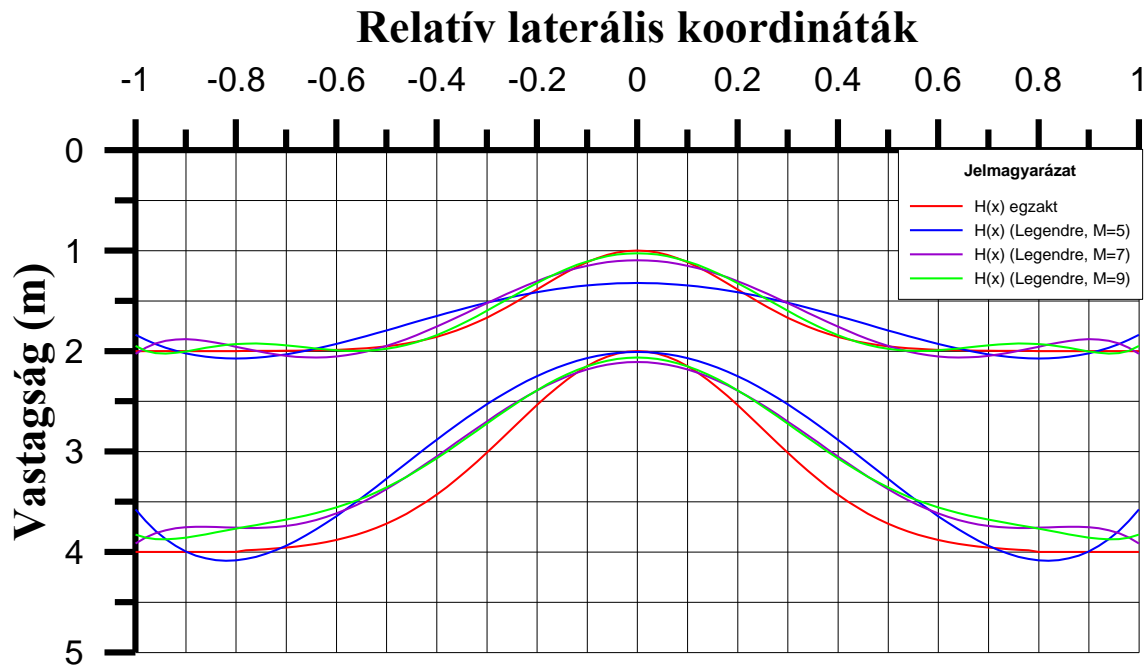
A hatványfüggvényeknél bemutatott vizsgálatainkkal való összehasonlítás végett elsőként maximálisan $M=5, 6, 7, 8, 9$ - ed rendű Legendre-polinomokkal történt sorfejtéses inverziót mutatjuk be az **A3.** táblázatban. (Az **A2.** táblázattal való összehasonlítás a kék színnel kiemelt sorok alapján lehetséges.)

M	Variancia átlag (%)	Korrelációs átlag (-)	D_h függvénytávolság (%)	Adattávolság (%)
5	6.732	0.396	10.331	2.108
6	6.732	0.354	10.331	2.108
7	3.837	0.320	6.185	1.222
8	3.837	0.298	6.185	1.222
9	2.057	0.282	5.324	0.631
11	1.175	0.252	3.476	0.339
13	1.438	0.228	2.118	0.379
15	1.579	0.214	2.130	0.378
17	1.760	0.257	2.106	0.382
19	3.037	0.406	2.452	0.445

A3. táblázat: A 1.5D inverzió eredményeit minősítő jellemzők Legendre-polinomokkal történt diszkretizáció esetén

Itt is láthatjuk a modell szimmetriájából adódó egyezést, a soron következő páros és páratlan maximális fokú közelítések között. Emiatt a tíz fölötti páros maximális fokszámokhoz tartozó eredményeket nem mutatjuk. Hatványfüggvényeknél az $M=10$ -hez tartozó futtatás numerikus okok miatt megszakadt és hasonló okból magasabb fokú közelítést nem vizsgálhattunk. Lényeges eltérés mutatkozik azonban a Legendre-polinom fokszámának növelésével. Mint látható 19-ed fokú közelítésben még stabil eredményt kapunk, noha a stabilitást jellemző paraméterek $M=17$ fölött romlani kezdenek.

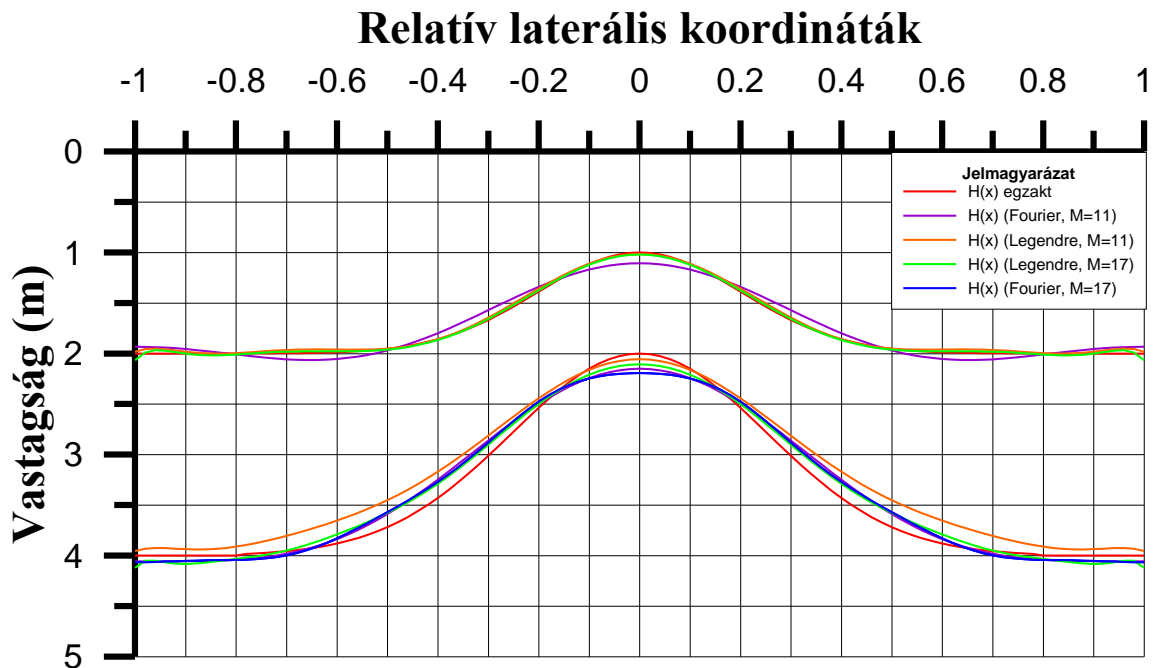
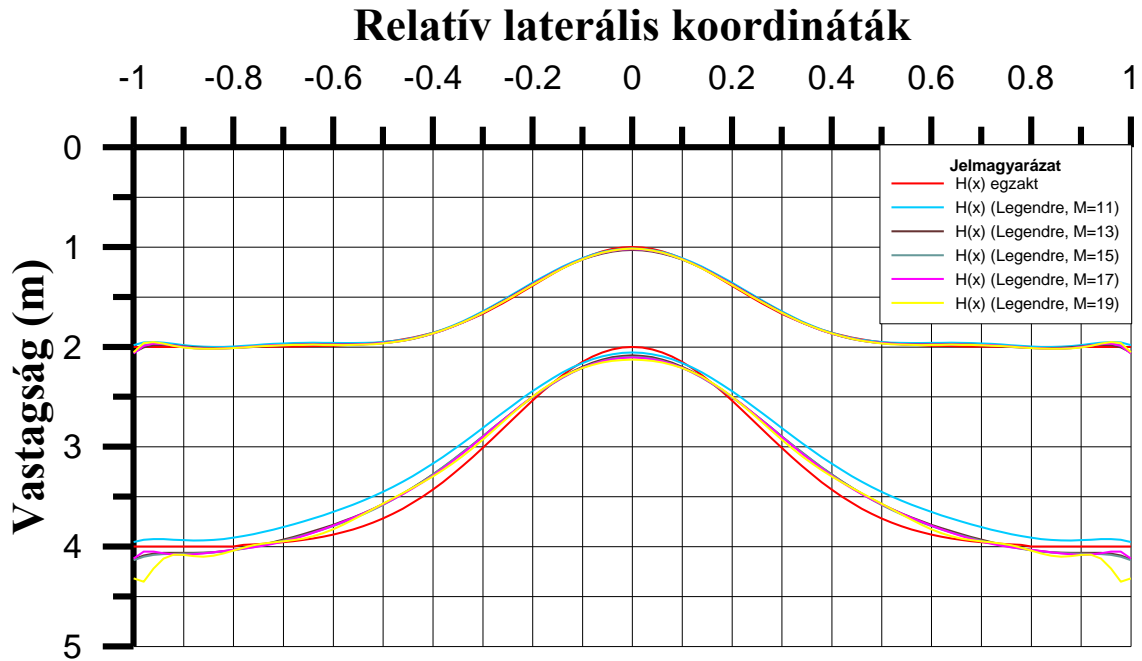
Az $M=5$ és $M=7$ -hez tartozó D_h vastagságtávolság viszonylag nagy értéke arra utal, hogy még kicsi a sorfejtési együtthatók száma, azaz a modellt (különösen a széleken) nem közelítjük megfelelően. Ez látható az **A7.** ábrán, amelyet az **A5.** ábrával (hatványfüggvények) összehasonlítva megállapíthatjuk a Legendre-polinomok jobb alkalmazhatóságát. Ezt tovább erősíti az **A8.** ábra, ahol a hatványsoros közelítésben már nem tárgyalható $M=11,13,15,17,19$ paraméterek mellett kapott vastagság görbéket mutatjuk be, amelyek elfogadható közelítést igazolnak. Mindezek alapján indokolt a hatványfüggvények helyett Legendre-polinomok alkalmazása a 1.5D inverziós eljárásban.



A Legendre-polinomok alkalmazhatóságát a Fourier-soros diszkrétizálással való összehasonlításban is vizsgálnunk kell. A függvénytávolságok összehasonlítását az **A4.** táblázatban mutatjuk be. Az egyes közelítésekhez tartozó vastagság görbéket az **A9.** ábrán szemléltetjük $M=11$ és $M=17$ paraméterek mellett.

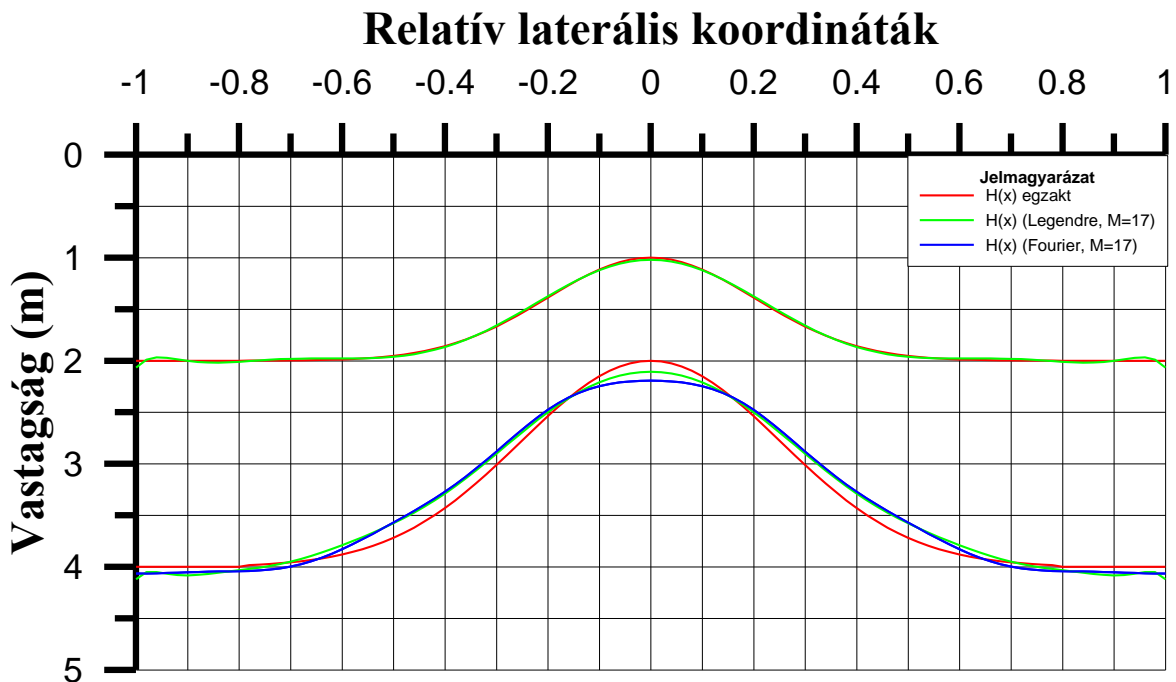
M	D_h függvénytávolság(%)	
	Fourier	Legendre
11	3.781	3.476
13	3.805	2.118
15	3.835	2.130
17	3.868	2.106
19	3.848	2.452

A4. táblázat: A Fourier soros illetve Legendre polinomokkal diszkrétizált 1.5D inverzióval kapott függvénytávolságok összehasonlítása



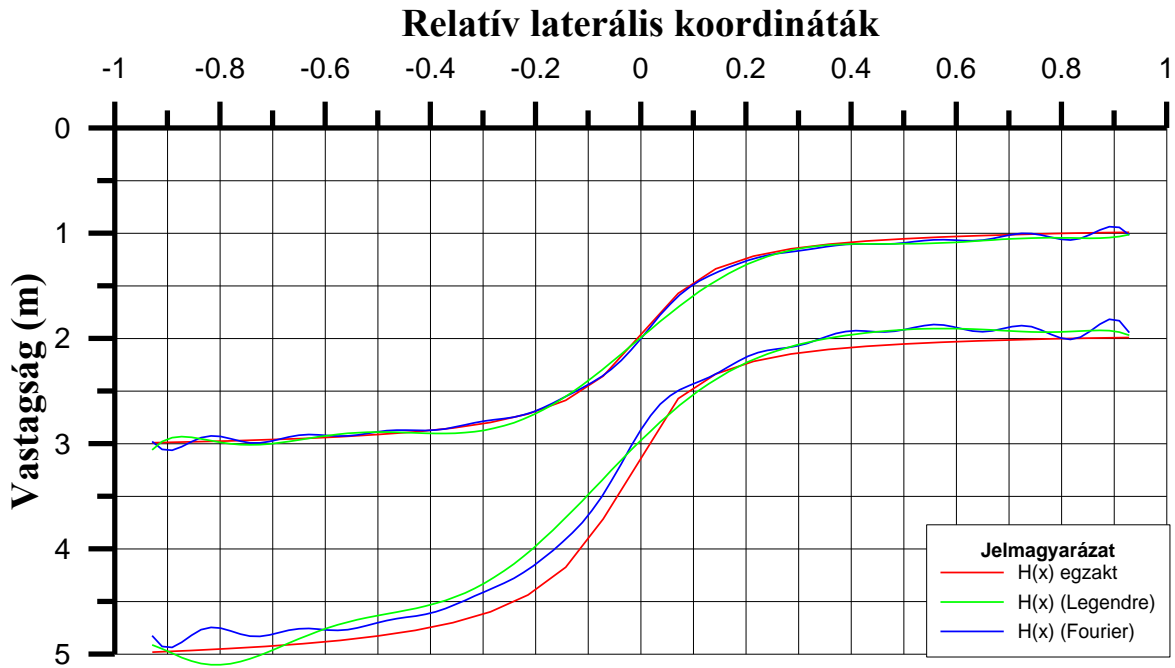
Mint látható, $M=11$ -től a 1.5D inverzió elfogadható eredményt ad. Külön ábrában emeljük ki a vastagságfüggvények $M=17$ -hez Legendre-polinomokkal, illetve Fourier-sorral kapott rekonstrukcióját (A10. ábra). A $H_1(x)$ vastagságfüggvényt szemlátomást igen jó pontossággal visszakaptuk. A $H_2(x)$ rétegvastagság laterális változását az inverziós szempontból elfogadhatónak mondhatjuk. Az inverzió bemenő adatait a felvett modellen

Spitzer (1995) 3D programjával számítottuk, így azokat a lehetőségekhez mérten igen pontosnak tekinthetjük. A vastagság rekonstrukció hibája egyben a 1.5D közelítés hibáját mutatja (a vastagság-távolság: 2-4%). Műszaki szempontból ez a pontosság teljes mértékben elfogadható. Különösen így van ez akkor, ha figyelembe vesszük, hogy a geoelektromos terítés dőlés irányú, a terítési hossz mentén a vastagság lényegesen változhat és a lokális vastagságokat a terítés közepén aktuális értékünkkel határoztuk meg. Ezt a feltételezést az **A10.** ábrán megfigyelhető rekonstrukciós pontosság visszaigazolja. Eredményünk tehát a 1.5D inverziós eljárás dőlés irányú terítésekből mért látszólagos fajlagos ellenállás adatok feldolgozására illetve értelmezésére való alkalmazhatóságát bizonyítja. Ennek jelentőségét kiemelni, hogy az inverziós eredményt néhányszor 10 másodperc futási idő mellett kaptuk meg. (Ezzel szemben, mint korábban említettük a 2D inverziós eljárás nagyságrendekkel nagyobb futási időt igényel.)



A10. ábra: A Fourier-soros, illetve Legendre polinomokkal diszkrétizált 1.5D inverzióval kapott függvény-távolságok összehasonlítása $M=17$ esetén

Vizsgáljuk meg a Legendre-polinomokkal történő diszkrétizálást a 1.5D inverzió esetén a **B modellen** is. Terjedelmi okokból a különböző fokszámok esetén végzett stabilitás vizsgálatot nem mutatjuk be. Az aszimmetrikus modellre vonatkozó vizsgálataink szerint a legjobb eredményt $M=11$ mellett kapjuk, amit a **B3.** ábrán szemléltetünk



B3. ábra: A Fourier-sorral és Legendre-polinomokkal diszkretizált 1.5D inverzióval kapott függvénytavolságok összehasonlítása aszimmetrikus modellen $M=11$

3.1.1.2. Csebisev-polinomok bevezetése a 1.5D inverziós eljárásba

A Csebisev-polinomok rekurziós formulája az alábbiak szerint írható fel

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

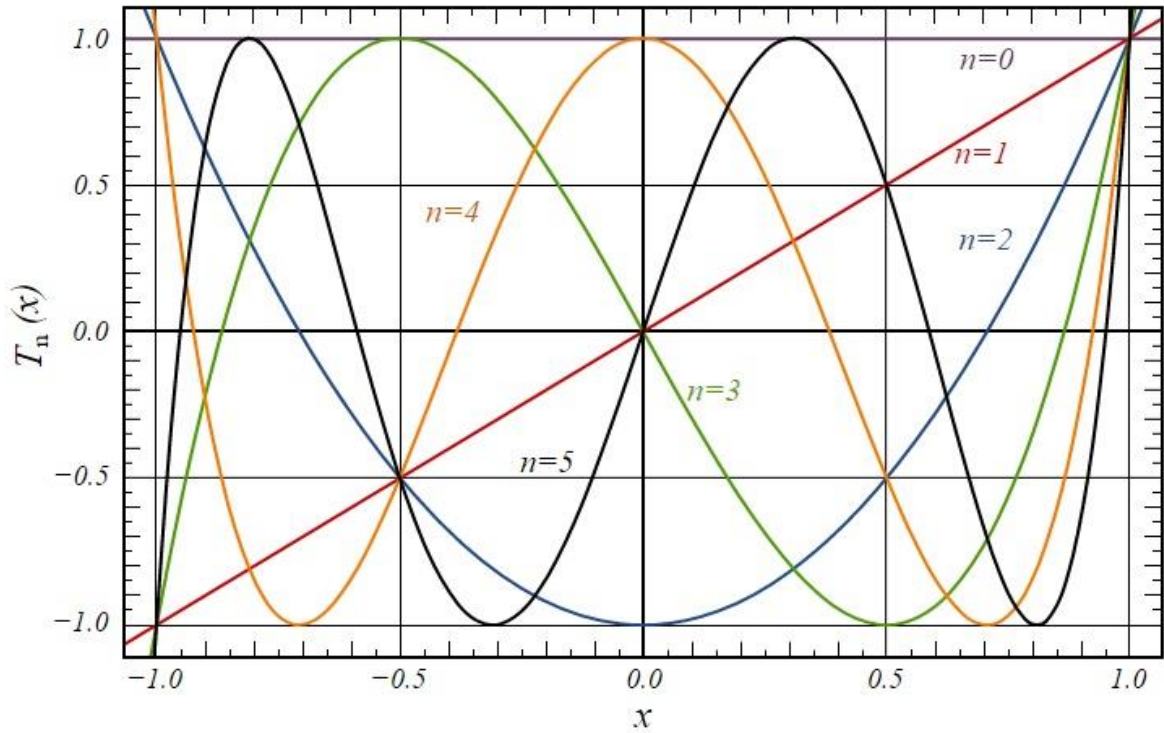
$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),$$

ahol $n \geq 2$. Ez a függvényrendszer az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvényre nézve ortogonális.

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } n = m = 0, \\ \pi & \text{ha } n = m \neq 0 \end{cases}$$

Az első öt Csebisev polinomot az **A11.** ábra szemlélteti. Amely szerint, az egymás után következő függvények lényegesen eltérnek egymástól. Így a magasabb kitevők használata

esetén ebben az esetben is elkerülhető a hatványfüggvényeknél említett, $[0,1]$ intervallumon jelentkező függvényhasonlósági probléma.



A11. ábra: Csebisev-polinomok (Forrás: Wikipedia2)

Az $x=\pm 1$ pontban való találkozása a különböző bázisfüggvényeknek az e pontokban lévő azonosságukra utal, amely azt jelzi, hogy ezeken a helyeken a sorfejtés egyértelműsége és ezzel az inverzió stabilitása kérdéses lehet, amelyre az eljárás során figyelemmel kell lenni. A vizsgálatunkban a felvett laterális modellünk mindkét szélén négy mérési pontban állandó vastagságot tételeztünk fel, így a modell Csebisev-polinomokkal történő leírása csak a ± 0.78574 intervallumon értelmezett. Ennek köszönhetően ebben az esetben numerikus stabilitási problémával nem kell számolnunk. Mindezek figyelembevételével vizsgáljuk meg a dőlésirányú szelvényeken mért adatok Csebisev-polinomokkal diszkrétizált 1.5D inverziójának eredményeit.

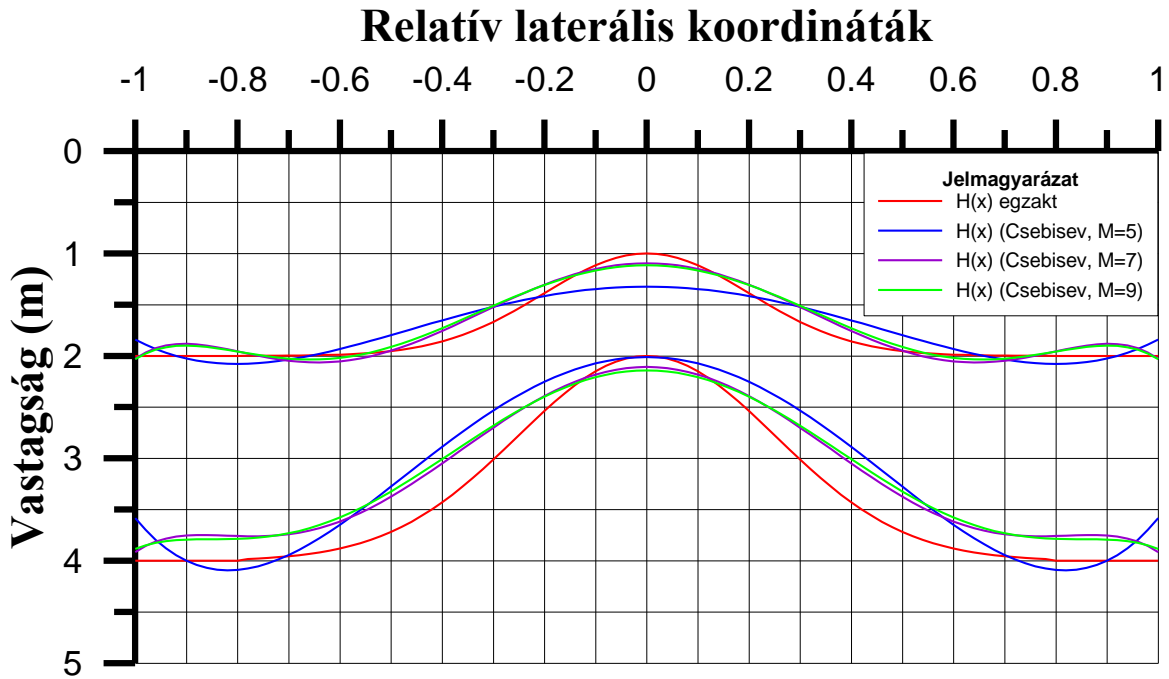
Elsőként a maximálisan $M=5, 6, 7, 8, 9$ - ed rendű Csebisev-polinomokkal végzett sorfejtéses inverziót mutatjuk be az **A5.** táblázatban a hatványfüggvényekkel történő összehasonlítás céljából. (Az összehasonlítást az **A2.** táblázattal a kék színnel kiemelt sorok alapján tehetjük meg.)

A páros és páratlan maximális fokú közelítések közötti egyezés a modell szimmetriájából adódik, ezért a tíz fölötti páros maximális fokszámokhoz tartozó eredményeket nem szemléltetem. A polinomok fokszámának növelésével azonban lényeges eltérést tapasztalunk a hatványfüggvények és a Csebisev-polinomok között. Míg a hatványfüggvények esetén az $M=10$ -hez tartozó futtatás – mint azt korábban említettem – numerikus okok miatt megszakadt és magasabb fokú közelítés vizsgálatára már nem volt lehetőség, addig a Csebisev-polinomok alkalmazása esetében az $M=19$ -ed fokú közelítésben még stabil eredményt kaptunk. A Csebisev polinomokkal végzett vizsgálatban a stabilitást jellemző paraméterek csak $M=17$ fölött kezdtek el romlani.

M	Variancia átlag (%)	Korrelációs átlag (-)	D_h függvénytávolság (%)	Adattávolság (%)
5	7.285	0.382	10.301	2.109
6	7.285	0.344	10.301	2.109
7	4.175	0.314	6.185	1.223
8	4.175	0.289	6.185	1.223
9	4.574	0.269	6.666	1.334
11	3.919	0.242	4.768	1.079
13	4.408	0.228	4.281	1.122
15	4.653	0.241	4.226	1.066
17	5.434	0.331	4.275	1.088
19	9.832	0.463	4.230	1.096

A5. táblázat: A 1.5D inverzió eredményeit minősítő jellemzők
Csebisev-polinomokkal történt diszkretizáció esetén

A D_h vastagságtávolság viszonylag nagy értéke $M=5, 7, 9$ esetekben arra utal, hogy a modellközelítés, mely az **A12.** ábrán látható, még nem megfelelő fokszámmal történik, a sorfejtési együtthatók száma még kicsi. A hatványfüggvényeket bemutató **A5.** ábrával összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a Csebisev-polinomok jobban alkalmazhatóak az inverziós eljárásban, melyet az **A13.** ábra $M=11,13,15,17,19$ paraméterek mellett kapott vastagság görbéi is alátámasztanak. Mindezek alapján javasolható a Csebisev-polinomok alkalmazása az 1.5D inverziós eljárásban a hatványfüggvények helyett.



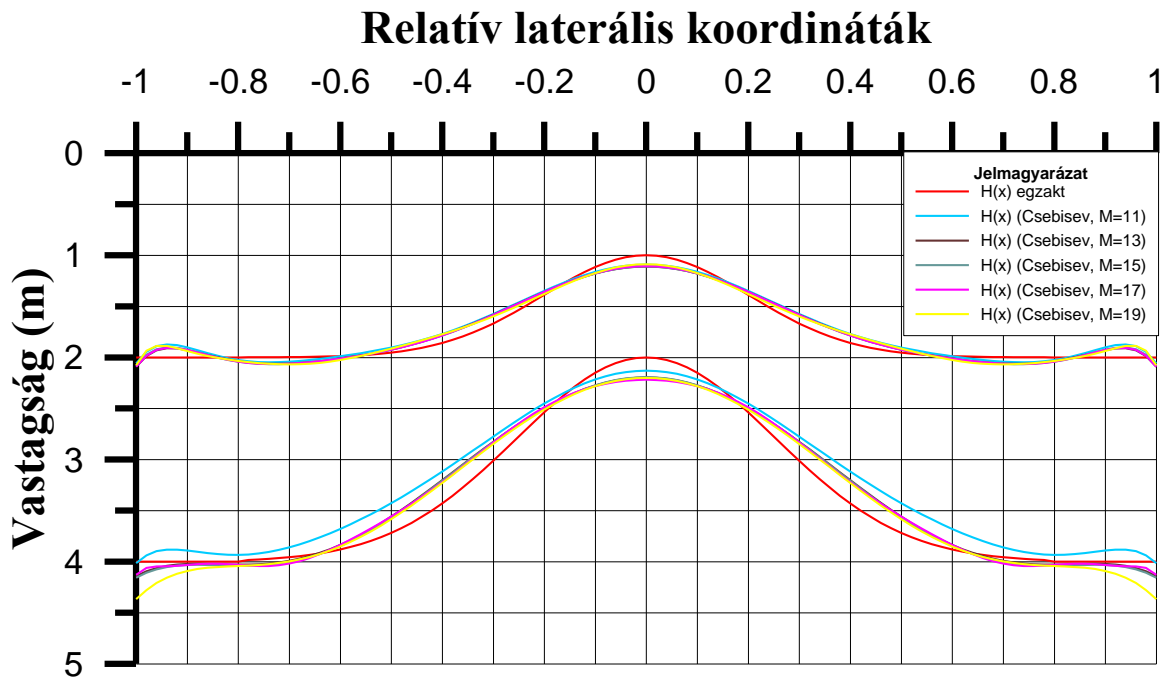
Megvizsgáltuk a Csebisev polinomok használhatóságát a Fourier-soros és a Legendre-polinomokkal történt diszkretizálással való összehasonlításban is. Az **A6.** táblázat a függvénytávolságok összehasonlítását mutatja be. Az **A14.** ábra az egyes közelítésekhez tartozó vastagság görbéket szemlélteti $M=11$ és $M=17$ paraméterek alkalmazása esetén.

M	D _h függvénytávolság(%)		
	Fourier	Legendre	Csebisev
11	3.781	3.476	4.768
13	3.805	2.118	4.281
15	3.835	2.130	4.226
17	3.868	2.106	4.275
19	3.848	2.452	4.230

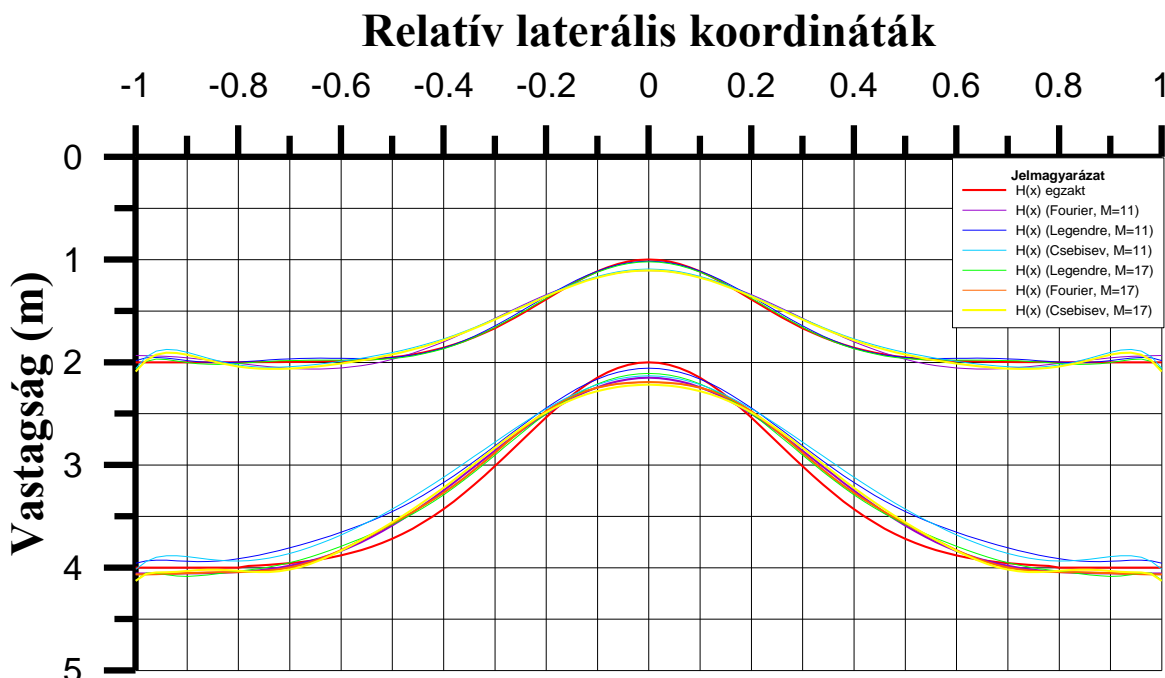
A6. táblázat: A Fourier soros, a Legendre és a Csebisev polinomokkal diszkretizált 1.5D inverzióval kapott függvénytávolságok összehasonlítása

Az **A6.** táblázat alapján megállapítható, hogy mindhárom bázisfüggvény-rendszer alkalmas a dőlésirányú szelvényeken mért adatok 1.5D inverziójában a vastagság függvények diszkretizálására. A Legendre-, és Csebisev-polinomok alkalmazásával a hatványfüggvényekkel felépített inverziós eljárásnál stabilabb eljárás definiálható. A Fourier-soros, illetve a Legendre- vagy Csebisev-polinomokkal történt diszkretizálás közel

azonos inverziós eredményre vezet. Megemlítendő azonban, hogy a három függvényrendszer közül – vizsgált példánkban – a Csebisev-polinomok adták a leggyengébb eredményt.



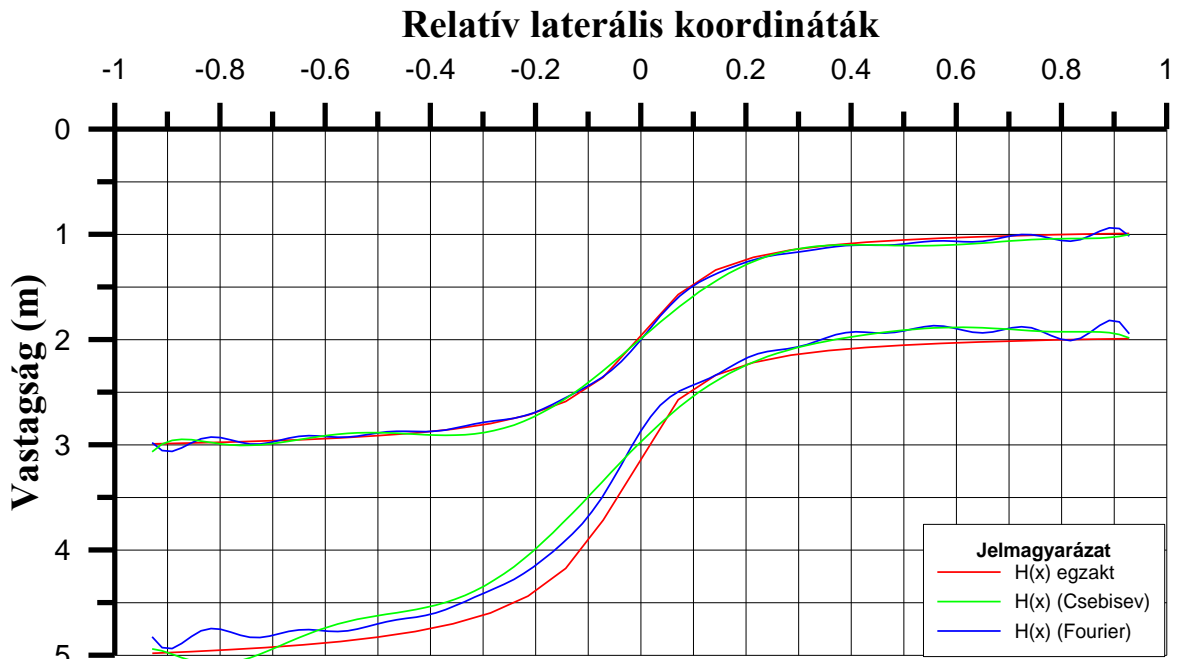
A13. ábra: A 1.5D inverzió eredménye Csebisev-polinomokkal történt diszkrétizációval $M=11,13,15,17$ és 19 hatványkitevők esetén



A14. ábra: A Fourier-sorozat, a Legendre-, illetve Csebisev-polinomokkal diszkrétizált 1.5D inverzióval kapott függvénytavolságok összehasonlítása $M=11$ és $M=17$ esetén

Vizsgáljuk meg a Csebisev-polinomokkal történő diszkretizálást a 1.5D inverzió esetén a **B modellen** is. A különböző fokszámok esetén végzett stabilitás vizsgálatot terjedelmi okokból itt sem mutatjuk be. Számításaink alapján a legjobb vastagságfüggvény illeszkedést az $M=11$ esetben kapjuk. A Fourier-sorral, ill. Csebisev-polinomokkal történt diszkretizációval 1.5D módszerrel kapott inverziós eredményeket a **B4.** ábrán hasonlíthatjuk össze. A vastagságfüggvények illeszkedését jellemző D_h mennyiséget az alábbi táblázat mutatja.

M	D_h függvénytávolság (%)	
	Fourier	Legendre
11	3.319	4.035

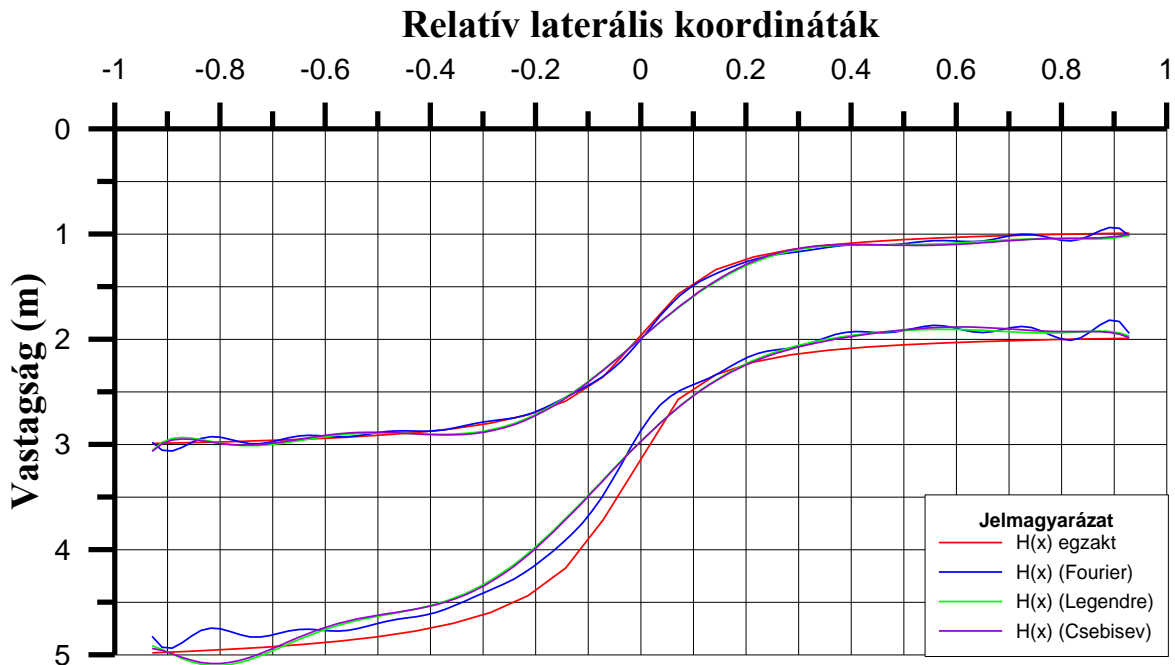


B4. ábra: Fourier-sorral és Csebisev-polinomokkal diszkretizált 1.5D inverzióval kapott függvénytávolságok összehasonlítása aszimmetrikus modellen $M=11$

A **B modell** esetében is elvégeztük a Fourier-soros, a Legendre- és a Csebisev-polinomos diszkretizálással kapott eredmények összehasonlítását, melyet a **B5.** ábra mutat be.

Ebben a fejezetben javaslatot tettem a hatványfüggvények Legendre-polinomokkal, illetve Csebisev-polinomokkal való kiváltására. Megmutattam, hogy az ortogonális illetve súlyfüggvényre ortogonális polinomok alkalmazásával a Fourier soros diszkretizálásra alapozott 1.5D módszerrel lényegében egyenértékű inverziós eljárást definiálhatunk.

Vizsgálataim azt mutatják, hogy a Legendre-, illetve Csebisev-polinomokkal történő diszkretizálás a dőlésirányú szelvényeken mért adatok 1.5D inverziójában eredményesen alkalmazható (**1. tézis**).



B5. ábra: A Fourier-soros, a Legendre-, illetve Csebisev-polinomokkal diszkretizált 1.5D inverzióval kapott függvénytávolságok összehasonlítása a **B modell** esetén

3.2. Az általánosított sorfejtéses eljárás továbbfejlesztése dőlésirányú szelvényadatok esetén

Doktori értekezésében Kis a 1.5D közelítő inverziós eljárás egy lehetséges továbbfejlesztését javasolta 2D földtani szerkezetek fölött csapás irányban mért látszólagos fajlagos ellenállás adatok feldolgozására. Javaslata a 1.5D módszernek egyik lényeges sajátosságához csatlakozott, miszerint az 1D előremodellezést a szelvényközép alatt vertikálisan értelmezett vastagságokkal végezzük. Kis (1998) igazolta, hogy az előremodellezést a vastagságfüggvények integrálközepével definiált 1D modellen végrehajtva pontosabb közelítést kaphatunk. Fizikailag ez a javaslat a csapás irányban terített geoelektromos szelvény dőlés irányú érzékenységét vette figyelembe.

Mint korábban kifejtettük, a multielektrodás mérési rendszereket gyakran terítik dőlés irányban. Ennek megfelelően az 1D előremodellezés tekintetében új helyzet áll elő, az adott (például 100m) hosszúságú terítés alatt a modell lényeges változást is mutathat. Ez a

körülmény indokoltta teszi az 1.5D alap gondolat alkalmazhatóságának vizsgálatát. A szelvényközép alatti lokális vastagság helyett egy megfelelő intervallumon integrálközéppel számított vastagsággal végzett 1D előremodellezés ebben a mérési elrendezésben még inkább indokoltnak tűnik. Az erre épített lokálisan 1D inverziós eljárás használhatóságát az alkalmazás sikere dönti el.

A dőlés irányú terítés mentén mért látszólagos fajlagos ellenállások feldolgozására szolgáló általánosított sorfejtéses eljárás algoritmusát Kis (1998) módszerének alkalmas átfogalmazásával, az alkalmazott bázisfüggvények vonatkozásában pedig annak továbbfejlesztésével adjuk meg. Továbbra is feltételezzük az egyszerűség kedvéért, hogy a 2D modell csupán a vastagságokban mutat laterális változást, az anyagi paraméterek konstansok. (Az algoritmus megfelelő általánosítása anyagi jellemzőiben is laterálisan változó földtani modellre könnyen elvégezhető. Az egyszerűsítést programozás-technikai okok indokolják).

Az általánosított sorfejtéses eljárás (azonos értelmű elnevezésként a továbbiakban az integrálközép módszer megjelölést is használjuk) keretében a vastagság függvényeket továbbra is valamely bázisfüggvény-rendszer szerinti sorfejtéssel közelítjük

$$h(x) = \sum_{i=1}^M B_i \Phi_i(x). \quad (26)$$

Itt a B_i sorfejtési együtthatók ismeretlenek. Kis (1998) bázisfüggvényekként intervallumon konstans függvényeket, ill. Csebisev-polinomokat vezetett be az általánosított sorfejtéses eljárásba. Az előzőek alapján indokolt a Legendre-polinomok, ill. a Fourier-sorban szereplő szinusz/koszinusz függvények bevezetése is. Az 1D előremodellezéshez a vastagságokat az x_j pont, mint szelvényközép körül laterális irányban definiált $(x_j - \Delta, x_j + \Delta)$ intervallumon integrálközépként értelmezzük

$$\hat{h}_j = \hat{h}(x_j) = \frac{1}{2\Delta} \int_{x_j - \Delta}^{x_j + \Delta} h(x') dx', \quad (27)$$

ahol j a szelvények sorszámán fut végig. Ha a $h(x)$ (26) kifejezését behelyettesítjük a (27) egyenletbe az alábbi összefüggést kapjuk

$$\hat{h}_j = \frac{1}{2\Delta} \int_{x_j - \Delta}^{x_j + \Delta} \sum_{i=1}^M B_i \Phi_i(x') dx' = \frac{1}{2\Delta} \sum_{i=1}^M B_i \int_{x_j - \Delta}^{x_j + \Delta} \Phi_i(x') dx' = \sum_{i=1}^M B_i \frac{1}{2\Delta} \int_{x_j - \Delta}^{x_j + \Delta} \Phi_i(x') dx'. \quad (28)$$

Legyen

$$S_{ji} = \frac{1}{2\Delta} \int_{x_j-\Delta}^{x_j+\Delta} \Phi_i(x') dx', \quad (29)$$

ekkor az integrálközépével definiált vastagság az alábbi alakban írható fel

$$\hat{h}_j = \sum_{i=1}^M B_i S_{ji}. \quad (30)$$

Mint látható $\Delta \rightarrow 0$ határátmenetben az integrálszámítás középérték tételét felhasználva $\lim S_{ji} \approx \lim \left(\frac{1}{2\Delta} \Phi_i(x_j) 2\Delta \right) = \Phi_i(x_j)$, azaz határesetként az általánosított sorfejtéses eljárás a 1.5D módszert adja vissza. Az elnevezés oka az, hogy a (30) egyenletben a bázisfüggvények helyett azok integrálközepe szerepel. Ettől kezdve az inverziós eljárás felépítése hasonló a 1.5D módszer szerkezetéhez: a (30) egyenlettel adott vastagságokat 1D előremodellezésben alkalmazzuk és a Jacobi-mátrix elemeit az 1D direkt feladat ismert formulái alapján számítjuk

$$\bar{d}^{sz} = \bar{g}(\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_p) = \bar{g}(B_1^{(1)}, \dots, B_{M_1}^{(1)}, \dots, B_1^{(N)}, \dots, B_{M_N}^{(N)}).$$

Linearizálás után a

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \delta \bar{B} = \underline{\underline{G}}^T \delta \bar{d}$$

normálegyenlet rendszert kapjuk, amellyel Menke (1984) szerint

$$\underline{\underline{COV}}(\bar{B}) = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{COV}}(\bar{d}) \underline{\underline{M}}^T.$$

Numerikus vizsgálatainkban továbbra is laterálisan változatlanoknak tekintjük a fajlagos ellenállásokat, így azok varianciáit (a mérési adatok varianciáinak függvényeként) ez az egyenlet előállítja (a fajlagos ellenállásokhoz formálisan egy-egy sorfejtési együtthatót rendelhetünk). Az 1D előre modellezésbe vitt \hat{h}_j vastagságparaméterek kovariancia mátrixát a sorfejtési együtthatók kovariancia mátrixából továbbra is a hibaterjedés figyelembe vételével számíthatjuk. Az i -ik réteg integrálközépével definiált vastagsága az x helyen a

$$\hat{\Phi}_n(x) = \frac{1}{2\Delta} \int_{x_j-\Delta}^{x_j+\Delta} \Phi_n(x') dx'$$

jelöléssel

$$\hat{h}_i(x) = \sum_{n=1}^{Q_i} B_n^{(i)} \hat{\Phi}_n(x). \quad (31)$$

Ennek várható értékét a becslés során jelölje $\bar{h}_i(x) = \sum_{n=1}^{Q_i} \bar{B}_n^{(i)} \hat{\Phi}_n(x)$, ahol a felülvonás az átlagolásra utal. Az átlagtól való eltérés

$$\delta \hat{h}_i(x) = \hat{h}_i(x) - \bar{h}_i(x) = \sum_{n=1}^{Q_i} (B_n^{(i)} - \bar{B}_n^{(i)}) \hat{\Phi}_n(x)$$

vagy másként

$$\delta \hat{h}_i(x) = \sum_{n=1}^{Q_i} \delta B_n^{(i)} \hat{\Phi}_n(x),$$

ahol $\delta B_n^{(i)} = B_n^{(i)} - \bar{B}_n^{(i)}$. A j -ik vastagságra hasonlóan $\delta \hat{h}_j(x) = \sum_{m=1}^{Q_j} \delta B_m^{(j)} \hat{\Phi}_m(x)$, így a vastagság kovariancia mátrix a

$$\delta \hat{h}_i(x) \delta \hat{h}_j(x) = \sum_{n=1}^{Q_i} \sum_{m=1}^{Q_j} \hat{\Phi}_n(x) \delta B_m^{(i)} \delta B_m^{(j)} \hat{\Phi}_m(x)$$

átlagolásával kapható. Egyszerűbb formulát kaphatunk (együttható mátrixok helyett együttható vektor) az indexek (23)-hoz hasonló átírásával

$$l = n + \sum_{p=1}^{i-1} Q_p, \quad n = 1, \dots, Q_i, \quad h = m + \sum_{q=1}^{j-1} Q_q, \quad m = 1, \dots, Q_j,$$

vagyis átlagolás után

$$\overline{\delta \hat{h}_i(x) \delta \hat{h}_j(x)} = \sum_{n=1}^{Q_i} \sum_{m=1}^{Q_j} \hat{\Phi}_n(x) \overline{\delta B_l \delta B_h} \hat{\Phi}_m(x),$$

amivel a vastagság kovariancia mátrix elemei a sorfejtési együtthatók kovarianciáiból az x helyen a

$$\left\{ \underline{\underline{COV(\hat{h}(x))}} \right\}_{i,j} = \sum_{n=1}^{Q_i} \sum_{m=1}^{Q_j} \hat{\Phi}_n(x) \left\{ \underline{\underline{COV(\bar{B})}} \right\}_{l,h} \hat{\Phi}_m(x) \quad (32)$$

képlet szerint számíthatók, vagy részletesebben

$$\left\{ \underline{\underline{COV(\hat{h}(x))}} \right\}_{i,j} = \sum_{n=1}^{Q_i} \sum_{m=1}^{Q_j} \frac{1}{2\Delta} \int_{x_j-\Delta}^{x_j+\Delta} \hat{\Phi}_n(x') dx' \left\{ \underline{\underline{COV(\bar{B})}} \right\}_{l,h} \frac{1}{2\Delta} \int_{x_j-\Delta}^{x_j+\Delta} \hat{\Phi}_m(x') dx'$$

A \hat{h}_j vastagságparaméter becslési pontosságát adó variancia

$$\text{var}(\hat{h}_j) = \left\{ \underline{\underline{\text{COV}(\hat{h}(x))}} \right\}_{j,j},$$

a korrelációs mátrix továbbra is

$$\text{CORR}_{ij} = \frac{\text{COV}_{ij}}{\sqrt{\text{COV}_{ii} \text{COV}_{jj}}}$$

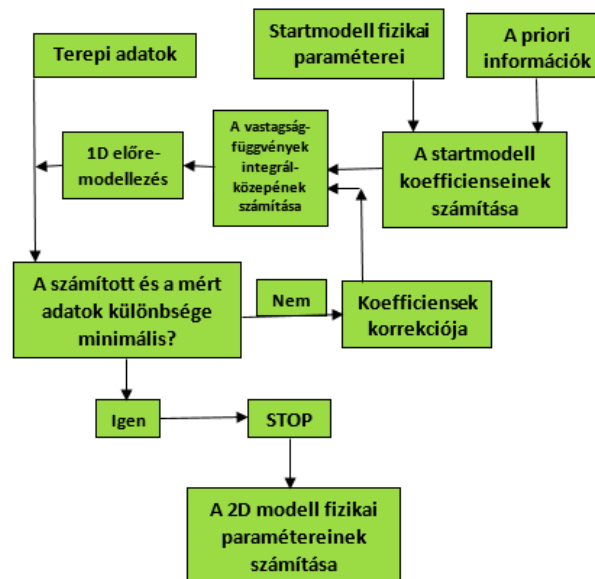
szerint állítható elő.

A (32) egyenlettel az 1D inverzióba vitt rétegvastagságok becslési hibáját és korreláltságát határozhatjuk meg. Numerikus vizsgálatainkban felvett modellünk vastagságfüggvényeinek becslési pontosságát elemeztük. Ekkor az inverz feladatot a sorfejtési együtthatókra megoldva a vastagságfüggvényeket az eredeti sorfejtéses diszkretizáció $h(x) = \sum_{i=1}^M B_i \Phi_i(x)$ formuláját alkalmazva számítjuk. Ezt figyelembe véve a vastagságfüggvény kovariancia mátrixát ismét a (32) szerinti

$$\left\{ \underline{\underline{\text{COV}(h)}} \right\}_{i,j} = \sum_{n=1}^{Q_i} \sum_{m=1}^{Q_j} \Phi_n(x) \left\{ \underline{\underline{\text{COV}(\bar{B})}} \right\}_{l,h} \Phi_m(x)$$

formula adja, ami a (32) kifejezésből a $\Delta \rightarrow 0$ határátmenetben is előállítható.

Az általánosított sorfejtéses eljárás sémáját az **A15.** ábra mutatja:



A15. ábra: Az általánosított sorfejtéses inverzió módszerének blokkdiagramja

Az általánosított sorfejtéses eljárást Kis (1998) csapás irányú terítésekre vezette be intervallumon konstans, illetve Csebisev-polinomok szerinti diszkretizációval. Most következő vizsgálatainkban a 1.5D inverzióval foglalkozó 3.1 fejezetben leírt dőlés irányú mérési elrendezéssel az **A2.**, ill. **B1.** ábrán felvett modellen véges differenciás eljárással számított (Spitzer 1995) adatrendszerrel teszteljük. Az új eljáráshoz kifejlesztett szoftverben a Csebisev-polinomokon kívül, Legendre-polinomokat, illetve Fourier sort is választhatunk a földtani szerkezet jellemzőinek diszkretizálására.

3.2.1. Az általánosított sorfejtéses eljárás továbbfejlesztése Fourier soros diszkretizálással

A 1.5D módszernél követett tárgyalásmóddhoz hasonlóan vizsgálatainkat Fourier soros diszkretizálással felállított általános sorfejtéses eljárással kezdjük. Terjedelmi okok miatt az alacsonyabb rendű közelítéseket nem mutatjuk be, ehelyett a lehető legpontosabb, $M=17$ -hez tartozó vizsgálati eredményt közöljük. Vizsgálatainkban elsőként azzal a feltételezéssel élünk, hogy az algoritmus megfogalmazásában bevezetett delta távolság mindkét rétegvastagság esetén azonos. Különböző futtatásainkban a delta paramétert 0.1-től indulva csökkentettük és figyeltük az inverziós eredményt jellemző D_h függvénytávolságot. E vizsgálatunk néhány lépését az **A7.** táblázatban szemléltetjük. Mint látható a legkisebb függvénytávolságot $\Delta=0.07$ mellett kaptunk: $D_h=1.911$. Várható azonban, hogy a különböző mélységekben elhelyezkedő réteghatároknak a geoelektromos mérések oldal irányú érzékenysége és ezzel a delta paraméter nem azonos, ezért „trial and error” módszerrel optimumot kerestünk a különböző Δ_1 , Δ_2 értékekre (továbbra is $M=17$ esetén). Az első réteghatárra az optimális érték 0.01-nek adódott, a Δ_2 -re vonatkozó optimum keresése során néhány közbenső eredményt az **A8.** táblázat mutatja be.

Δ_1	Δ_2	D_h függvénytávolság (%)	Adattávolság (%)
0.1	0.1	2.067	0.153
0.08	0.08	1.922	0.151
0.07	0.07	1.911	0.151
0.06	0.06	1.913	0.151
0.04	0.04	1.935	0.151

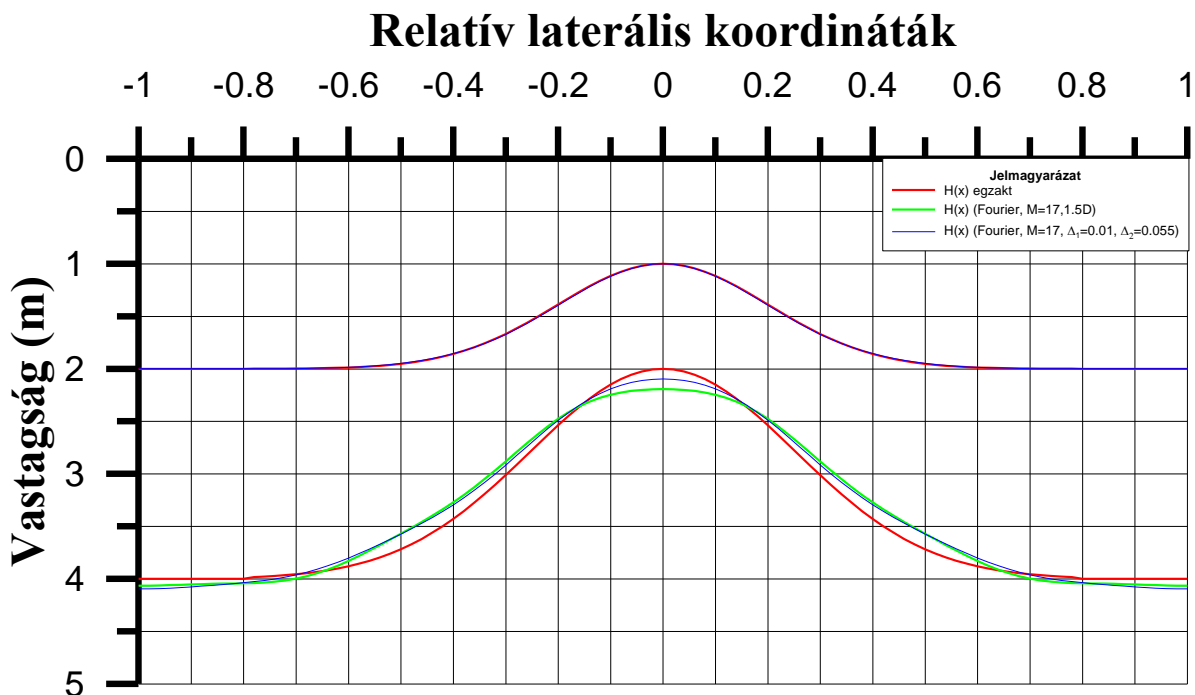
A7. táblázat: Az optimális integrációs intervallum keresése $\Delta_1 = \Delta_2$ feltételezéssel Fourier soros diszkretizáció esetén ($M=17$)

Mint látható az optimum a $\Delta_2=0.06$ -nál jelentkezik. +/-1-re normált ábránk mögött a valódi mérési rendszer +/-210 m tartományon húzódik. A Δ_1 , Δ_2 paraméterek 0.01, illetve 0.06 –nál kapott optimuma a méretarányt figyelembe véve 2.1 méter, illetve 11.5 méter.

Δ_1	Δ_2	D_h függvénytávolság (%)	Adattávolság (%)
0.01	0.15	4.077	0.149
0.01	0.06	1.888	0.153
0.01	0.05	1.912	0.153
0.01	0.04	1.932	0.153
0.01	0.01	1.961	0.152

A8. táblázat: Az optimális integrációs intervallum keresése eltérő Δ_1 és Δ_2 feltételezéssel Fourier soros diszkrétizáció esetén ($M=17$)

Az **A16.** ábrán $M=17$ Fourier soros diszkrétizációnál optimális deltákkal (kék görbe) kapott eredményt a 1.5D inverziónál talált vastagság függvényekkel (zöld görbe) hasonlítjuk össze. Szemlátomást jobb eredményt szolgáltat az integrálközép módszer, amit a vastagság távolságokkal is alátámasztunk (**A9.** táblázat).



A16. ábra: A 1.5D és az integrálközép inverzió eredménye Fourier soros diszkrétizáció esetén

M=17	D_h függvénytávolság (%)	Adattávolság (%)
1.5D	3.868	0.996
int.közép	1.888	0.153

A9. táblázat: A 1.5D és az integrálközép inverzió eredményeit minősítő jellemzők Fourier soros diszkretizáció esetén

Az előző vizsgálatainkat a **B1.** ábrán látható aszimmetrikus modell esetében is elvégeztük. Terjedelmi okok miatt az azonos delta paraméterrel kapott eredményeket nem közöljük. A Δ_2 paraméter változtatásával (továbbra is M=23 mellett) kapott inverziós eredményt a **B2.** táblázat foglalja össze.

Δ_1	Δ_2	D_h függvénytávolság (%)
0.01	0.06	2.852
0.01	0.05	2.892
0.01	0.04	2.841
0.01	0.03	2.851
0.01	0.02	2.881
0.01	0.01	3.201

B2. táblázat: Az optimális integrációs intervallum keresése eltérő Δ_1 és Δ_2 feltételezéssel Fourier soros diszkretizáció esetén (**B modell**, M=17)

Az első réteghatárra vonatkozó Δ_1 optimális értéke 0.01-nek adódott, míg a második réteghatárra vonatkozó optimum $\Delta_2 = 0.04$ -nél jelentkezett. (Ezen optimális Δ_1 , Δ_2 paraméterek valódi értéke a méretarányt figyelembe véve 2.1 méter, illetve 8.4 méter.)

3.2.2. Az általánosított sorfejtéses eljárás továbbfejlesztése Legendre - polinomos diszkretizálással

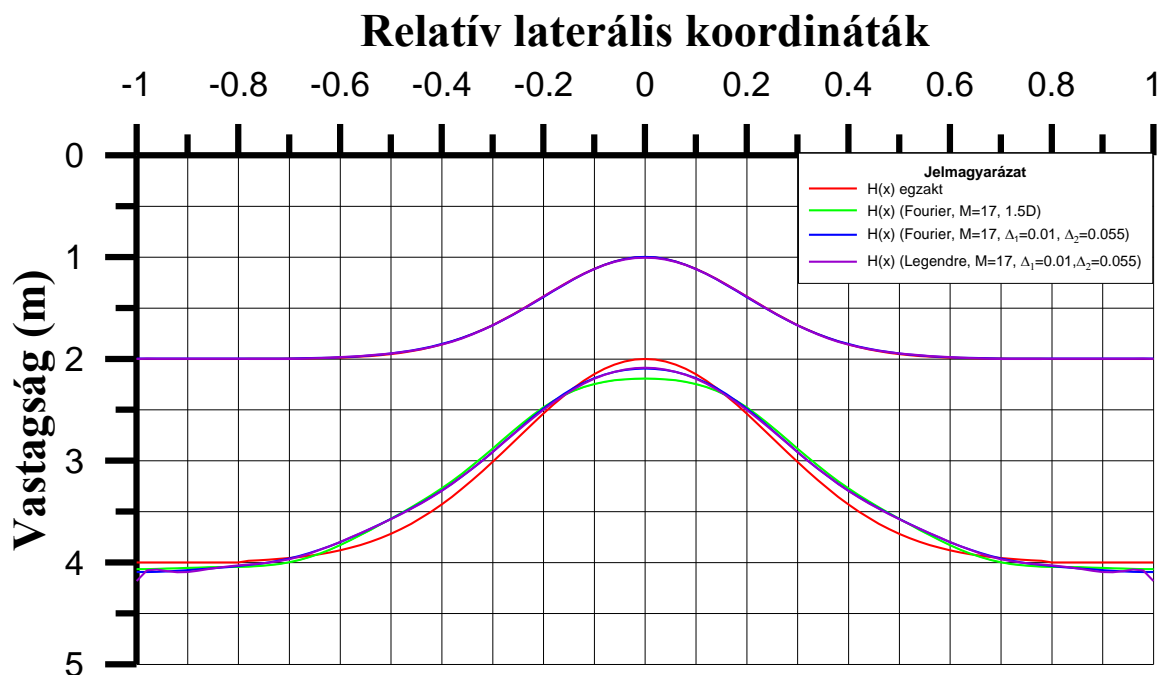
Az általánosított sorfejtéses eljárás programrendszerébe a Legendre-polinomos diszkretizációt is beépítettük. Az ezzel folytatott vizsgálatainkat végezve az optimumkeresésben először feltételeztük, hogy az alkalmazott delta távolság mindkét rétegvastagság esetén azonos. Ebben az esetben a közös delta paramétert ismét 0.1-től indulva csökkentettük. A legkisebb függvénytávolságot $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.07$ mellett kaptuk. Megengedve a Δ_1 és Δ_2 eltérését, az optimumkeresés utolsó fázisát már optimális és rögzített

0.01 mellett az **A10.** táblázat mutatja. Mint látható az optimum Legendre polinomos diszkretizálással $\Delta_1=0.01$ és $\Delta_2=0.055$ mellett $D_h=1.898$.

Δ_1	Δ_2	D_h függvénytávolság (%)	Adattávolság (%)
0.01	0.15	3.040	0.140
0.01	0.06	1.907	0.152
0.01	0.055	1.898	0.152
0.01	0.05	1.907	0.152
0.01	0.04	1.917	0.151
0.01	0.01	1.931	0.151

A10. táblázat: Az optimális integrációs intervallum keresése eltérő Δ_1 és Δ_2 feltételezéssel Legendre-polinomos diszkretizáció esetén ($M=17$)

A kapott vastagsággüggvények szinte teljesen megegyeznek az azonos módszernél Fourier soros diszkretizációval kapott görbékkel. Ezt szemléltethetjük úgy, hogy az **A16.** ábrát kiegészítjük az új görbékkel. Az eredményt az **A17.** ábrán láthatjuk: az új (lila) vastagsággörbe szinte teljesen elfedi a Fourier soros diszkretizációval kapott (kék) görbét.



A17. ábra: A 1.5D és az általánosított sorfejtéses inverzió eredménye Fourier-soros és Legendre-polinomos diszkretizáció esetén

A Legendre-polinomos diszkretizációt a **B modell** esetében is elvégeztük. Az azonos delta paraméterrel történő vizsgálat eredményeit terjedelmi okok miatt nem mutatjuk be. A

„trial and error” módszerrel végrehajtott optimális delta meghatározásának inverziós eredményei a **B3.** táblázatban láthatóak. Mint láthatjuk $\Delta_1 = 0.01$ és $\Delta_2 = 0.03$ értékeknél jutottunk a vastagságfüggvény legjobb illeszkedéséhez.

Δ_1	Δ_2	D_h függvénytávolság (%)
0.01	0.05	4.253
0.01	0.04	4.026
0.01	0.03	3.971
0.01	0.02	4.032
0.01	0.01	4.032

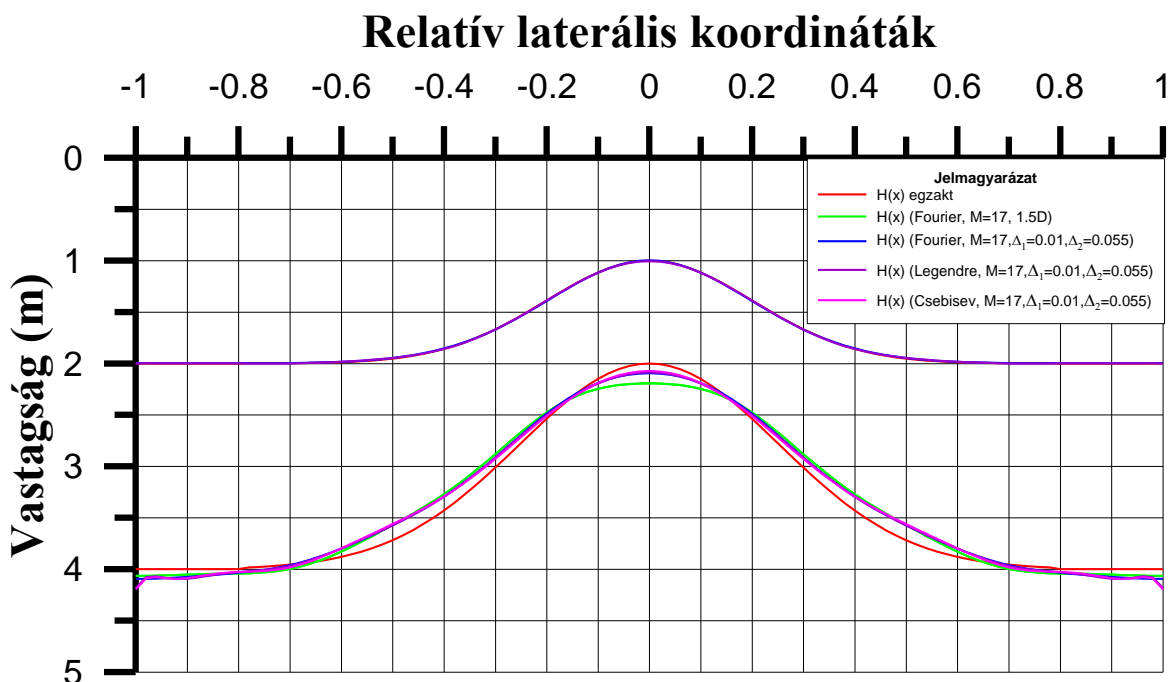
B3. táblázat: Az optimális integrációs intervallum keresése eltérő Δ_1 és Δ_2 feltételezéssel Legendre polinomos diszkretizáció esetén (M=23, **B** modell)

3.2.3. Az általánosított sorfejtéses eljárás továbbfejlesztése Csebisev-polinomos diszkretizálással

Az intervallum inverziós eljárás programrendszerébe beépítettük a Csebisev-polinomos diszkretizációt is. Az ezzel folytatott vizsgálatainkban a delta távolságokat először mindkét rétegvastagság esetében azonosnak választottuk. Ebben az esetben a legkisebb függvénytávolságot $\Delta=0.06$ mellett kaptuk az **A11.** táblázat tanúsága szerint. Eltérő Δ_1 és Δ_2 -re vonatkozó optimumkeresés utolsó fázisát már rögzített 0.01 mellett, az **A12.** táblázat mutatja. Mint látható az optimumot $\Delta_1=0.01$ és $\Delta_2= 0.0575$ mellett 1.850 függvénytávolságnál kaptuk. A vastagságfüggvények az **A18.** ábra tanúsága szerint teljesen egybe esnek az általánosított sorfejtéses eljárás Fourier-sorral, illetve Legendre-polinomokkal diszkretizált változataiban kapott görbékkel.

Δ_1	Δ_2	D_h függvénytávolság (%)	Adattávolság (%)
0.1	0.1	2.990	0.143
0.08	0.08	8.625	0.181
0.07	0.07	3.333	0.151
0.06	0.06	1.888	0.151
0.05	0.05	1.891	0.151
0.04	0.04	1.907	0.151

A11. táblázat: Az optimális integrációs intervallum keresése $\Delta_1=\Delta_2$ feltételezéssel Csebisev polinomos diszkretizáció esetén (M=17)



A18. ábra: A Fourier-soros, Legendre- és Csebisev-polinomokkal diszkrétizált sorfejtéses inverzióval kapott vastagságfüggvények $M=17$ esetén

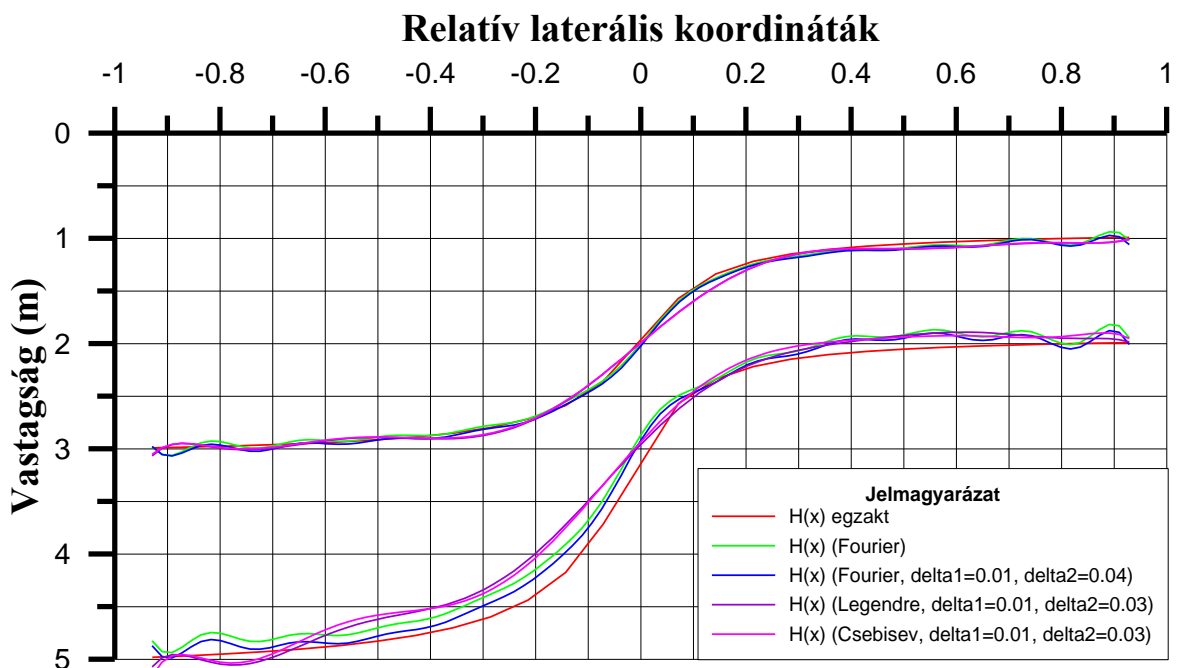
Δ_1	Δ_2	D_h függvénnytávolság (%)
0.01	0.07	3.390
0.01	0.06	1.905
0.01	0.057	1.850
0.01	0.055	1.896

A12. táblázat: Az optimális integrációs intervallum keresése eltérő Δ_1 és Δ_2 feltételezéssel Csebisev polinomos diszkrétizáció esetén ($M=17$)

A Csebisev-polinomokkal történő diszkrétizáció alkalmazásával a **B** modellen is elvégeztük a vizsgálatainkat, melyek közül terjedelmi okból csak az eltérő delta értékek mellett kapott eredményt közöljük. Mint látható a **B4.** táblázatban az optimális delta értékek a $\Delta_1 = 0.01$ és $\Delta_2 = 0.03$ esetén adódtak. A **B6.** ábra mutatja be a Fourier-sorral, valamint Legendre-, illetve Csebisev-polinomokkal végrehajtott intervallum inverzió eredményeit az aszimmetrikus modell esetén. A **B6.** ábra vastagság görbéi alapján látható, hogy aszimmetrikus modell esetén a gyorsan változó réteghatáron a Fourier diszkrétizáció mutat jobb közelítést.

Δ_1	Δ_2	D_h függvénytávolság (%)
0.01	0.05	4.385
0.01	0.04	4.088
0.01	0.03	3.907
0.01	0.02	3.978
0.01	0.01	4.025

B4. táblázat: Az optimális integrációs intervallum keresése eltérő Δ_1 és Δ_2 feltételezéssel Csebisev-polinomos diszkretizáció esetén ($M=23$, **B** modell)



B6. ábra: A Fourier-soros, Legendre-, és Csebisev-polinomokkal diszkretizált intervallum inverzióval kapott függvénytávolságok összehasonlítása

Ebben a fejezetben az általánosított sorfejtéses eljárás továbbfejlesztésének eredményeit mutattam be dőlésirányú szelvényeken mért adatokon. Bemutattam, hogy az eljárás a 1.5D inverziónál kis mértékben jobb paraméterbecslést eredményez. Az integrációs intervallum vizsgálata során megállapítottam, hogy a különböző mélységű réteghatárok esetén más-más integrációs intervallum választása szükséges. A diszkretizációt Fourier-sorral, valamint Legendre-, illetve Csebisev-polinomokkal valósítottam meg. Vizsgálataim azt mutatják, hogy a három (ortogonális) bázisfüggvény rendszer egyaránt alkalmas az integrálközép módszer esetében a diszkretizálásra, egymáshoz igen közeli inverziós eredményt szolgáltatnak az alábbi, **A** modellre vonatkozó összefoglaló táblázat tanúsága szerint.

Diszkrétizálás módja	Δ_1	Δ_2	D_h függvénytávolság (%)
Fourier	0.01	0.060	1.888
Legendre	0.01	0.055	1.898
Csebisev	0.01	0.057	1.850

Az integrációs intervallumok átlaga $\Delta_1 = 0.01$, $\Delta_2 = 0.057$, ami a valódi távolság skálán 2.1 m, ill. 12 m. Ezeket az $AB/2=50$ m terítési hosszal összehasonlítva 4% ill. 24% adódik. Az általánosított sorfejtéses eljárás Fourier-sorral, Legendre-, illetve Csebisev-polinomokkal diszkrétizálva a dőlésirányú szelvényeken mért adatok 1.5D inverziójával azonos értékű paraméterbecslést szolgáltat.

Az inverziós eredmény minősítésére a hibaterjedés törvénye alapján levezettem az integrálközep módszer keretében a lokálisan 1D előremodellezésbe bevitt vastagságok kovariancia és korrelációs mátrixát (2. tézis).

3.3. Súlyozott integrálközepes módszer alkalmazása dőlés irányú terítés esetén

Az előzőekben láttuk, hogy a 1.5D inverziós eljárás lokálisan 1D közelítést jelent olyan vastagságadatokkal, amelyeket a mérési vonal közepén, egy vertikális metszet mentén kapunk a vastagság függvényekből. Az integrálközep módszer fejlesztését az a törekvés motiválta, hogy a geoelektromos mérés oldal irányú érzékenységét is figyelembe vegyük. Vizsgálataink megmutatták, hogy az utóbbi módszer (2Δ) integrációs tartományának változtatásával a vastagságfüggvény rekonstrukciója optimalizálható úgy, hogy a különböző réteghatárokhoz eltérő integrációs intervallumok tartozzanak. Az optimumhoz tartozó vastagságfüggvény rekonstrukciós távolsága (D_h) az **A9.** táblázat tanúsága szerint az 1.5D inverzióhoz képest az integrálközep módszer jobbnak bizonyult. Ez azt jelzi, hogy az oldal irányú érzékenység figyelembevétele a lokálisan 1D közelítés paramétereinek előállításában indokolt volt.

Ugyancsak indokoltnak tűnik annak figyelembevétele, hogy az integrálközep számításában a középponttól távolodva az oldal irányú érzékenység csökken. Ez indokolja, hogy az integrálközep helyett, súlyozott integrálközepet számítsunk egy olyan $W(u)$ súlyfüggvénnyel, amely a középtől ($u=0$) mért távolsággal csökkenő értékeket ad. Ez a gondolat a Geofizikai Tanszék inverziós kutatásai során már korábban felmerült. Török és Kis (2001) csapásirányú terítés feltételezésével közölt numerikus eredményeket a lokálisan

1D előremodellezés vastagságparamétereinek súlyozott integrálközéppel történt előállításával kapcsolatban. Az eljárás részletesebb kifejtése azonban későbbiekben sem történt meg. Az 1D és az integrálközep módszereknél a fentiek szerinti (a multielektrodás mérési elrendezések megjelenése kapcsán indokolt) vizsgálatát, ill. továbbfejlesztését a súlyozott integrálközep módszer vonatkozásában a következőkben végezzük el.

A lokálisan 1D előremodellezés számára a vastagságparamétereket a súlyozott integrálközep módszer esetében az alábbi integrállal állítjuk elő

$$\tilde{h}_j = \tilde{h}(x_j) = \frac{I}{\int_{-A}^{+A} W(u) du} \int_{x_j-A}^{x_j+A} W(x' - x_j) h(x') dx', \quad (33)$$

ahol $j=1 \dots N$, (N a rétegek száma). A vastagságfüggvényeket továbbra is sorfejtéssel diszkrétizáljuk

$$h(x') = \sum_{i=1}^M B_i * \Phi_i(x'), \quad (34)$$

miközben h_j a j -edik mérési pontban a vastagság, x_j a j -edik mérési pont laterális koordinátája, A a választott intervallum hossza, Φ_i az i -edik bázis függvény, B_i az i -edik réteg vastagság koefficiense, $W(u)$ az alkalmazott súly. Ha (34) -et visszahelyettesítjük a (33) egyenletbe, akkor az alábbi eredményre jutunk

$$\begin{aligned} \tilde{h}_j = \tilde{h}(x_j) &= \frac{I}{\int_{-A}^{+A} W(u) du} \int_{x_j-A}^{x_j+A} W(x' - x_j) \sum_{i=1}^M B_i \Phi_i(x') dx' = \\ &= \sum_{i=1}^M B_i \frac{I}{\int_{-A}^{+A} W(u) du} \int_{x_j-A}^{x_j+A} W(x' - x_j) \Phi_i(x_j) dx' = \sum_{i=1}^M B_i S_{ji}. \end{aligned} \quad (35)$$

Legyen

$$DW = \int_{-A}^{+A} W(u) du, \quad (36)$$

akkor $S_{ji} = \frac{I}{DW} \int_{x_j-A}^{x_j+A} W(x' - x_j) \Phi_i(x') dx'$, amivel az 1D előremodellezésbe behelyettesítendő

vastagságok

$$\bar{h}_j = \sum_{i=1}^M B_i S_{ji} . \quad (37)$$

(Az előzőekben vizsgált integrálközép módszer speciális esetként a fentiekből $W(u) = 1$

határesetben visszakapható. Ekkor $DW=2\Delta$ és ezzel $\bar{h}_j = \hat{h}_j = \frac{1}{2\Delta} \int_{x_j-\Delta}^{x_j+\Delta} h(x') dx' .)$

A (33) egyenlettel adott vastagságokat a lokálisan 1D előremodellezésben alkalmazzuk és a Jacobi-mátrix elemeit az 1D direkt feladat ismert formulái alapján számítjuk a direkt feladat

$$\bar{d}^{sz} = \bar{g}(\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_p) = \bar{g}(B_1^{(1)}, \dots, B_{M_1}^{(1)}, \dots, B_1^{(N)}, \dots, B_{M_N}^{(N)})$$

formuláinak segítségével. Linearizálás után a

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \delta \bar{B} = \underline{\underline{G}}^T \delta \bar{d}$$

normálegyenlet rendszert kapjuk, amellyel ismét előállíthatjuk a sorfejtési együtthatók becslésének kovariancia mátrixát (Menke 1984)

$$\underline{\underline{COV}}(\bar{B}) = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{COV}}(\bar{d}) \underline{\underline{M}}^T .$$

Numerikus vizsgálatainkban továbbra is laterálisan változatlanak tekintjük a fajlagos ellenállásokat, így azok varianciáit (a mérési adatok varianciáinak függvényeként) ez az egyenlet előállítja (úgy vehetjük, hogy a rétegszámnak megfelelő további együtthatónk van).

Az 1D előre modellezésbe vitt \bar{h}_j paraméterek kovariancia mátrixát a sorfejtési együtthatók kovariancia mátrixából továbbra is a hibaterjedés figyelembe vételével számíthatjuk. Az i -ik réteg vastagsága az x helyen (35) szerint

$$\bar{h}_i(x) = \sum_{n=1}^{Q_i} B_n^{(i)} \bar{\Phi}_i(x_j), \quad (38)$$

ahol

$$\bar{\Phi}_i(x_j) = \frac{1}{\int_{-\Delta}^{+\Delta} W(u) du} \int_{x_j-\Delta}^{x_j+\Delta} W(x' - x_j) \Phi_i(x_j) dx' .$$

A közelítő 1D előremodellezésbe bevitt vastagságok (38) kifejezése formailag megegyezik (33)-ban az integrálközép módszerre adottakkal. A kovariancia mátrix levezetését ezért nem

ismételjük meg, a végeredmény, amivel a vastagság kovariancia mátrix elemei a sorfejtési együtthatók kovarianciáiból x helyen meghatározhatók

$$\left\{ \underline{COV}(\hat{h}(x)) \right\}_{i,j} = \sum_{n=1}^{Q_i} \sum_{m=1}^{Q_j} \check{\Phi}_n(x) \left\{ \underline{COV}(\bar{B}) \right\}_{l,h} \check{\Phi}_m(x) \quad (39)$$

vagy részletesebben

$$\left\{ \underline{COV}(\hat{h}(x)) \right\}_{i,j} = \sum_{n=1}^{Q_i} \sum_{m=1}^{Q_j} \frac{1}{\int_{-\Delta}^{+\Delta} W(u) du} \int_{x_j-\Delta}^{x_j+\Delta} \Phi_n(x') dx' \left\{ \underline{COV}(\bar{B}) \right\}_{l,h} \frac{1}{\int_{-\Delta}^{+\Delta} W(u) du} \int_{x_j-\Delta}^{x_j+\Delta} \Phi_n(x') dx'$$

A korrelációs mátrix továbbra is (14) szerint állítható elő.

A (39) egyenlettel az 1D inverzióba vitt rétegvastagságok becslési hibáját és korreláltságát határozhatjuk meg. Numerikus vizsgálatainkban felvett modellünk vastagságfüggvényeinek becslési pontosságát elemeztük. Ekkor az inverz feladatot a sorfejtési együtthatókra megoldva a vastagságfüggvényeket az eredeti sorfejtéses diszkrétizáció $h(x) = \sum_{i=1}^M B_i \Phi_i(x)$ formuláját alkalmazva számítjuk. Ezt figyelembe véve a

vastagságfüggvény kovariancia mátrixát ismét a (32) szerinti

$$\left\{ \underline{COV}(h) \right\}_{i,j} = \sum_{n=1}^{Q_i} \sum_{m=1}^{Q_j} \Phi_n(x) \left\{ \underline{COV}(\bar{B}) \right\}_{l,h} \Phi_m(x) \text{ formula adja.}$$

Az új eljárás numerikus vizsgálatát elsőként a korábbiakban is használt modell- (**A2.** és **B1.** ábra) és adatrendszer alkalmazásával végeztük. A súlyfüggvényt a

$$W(u) = \exp\left(-\left(\frac{u}{D}\right)^2\right) \quad (40)$$

alakban vettük fel, az integrálás tartománya esetünkben a terítési hosszt ($AB/2=50\text{m}$) közelíti, az egyre normálás után értéke $\Delta=0.238$. A D távolságot az integrálközép módszerével követett optimumkereséshez hasonlóan határozzuk meg. Előzetesen is jelezhetjük, hogy pl. $D=0.05$ mellett $u=3D$ esetén $W=1.2 \cdot 10^{-4}$, a terítés végén pedig $x' = \Delta$ -nál $W=1.38 \cdot 10^{-10}$.

Numerikus vizsgálatainkat Legendre polinomos diszkrétizálással $M=17$ mellett kezdjük. Elsőként feltételeztük, hogy a D paraméter mindkét réteghatárra azonos értékű. Az optimumkeresés eredményét az **A13.** táblázatban mutatjuk be, ahonnan $D=0.06$ adódik.

D₁	D₂	D_h függvénytávolság (%)
0.1	0.1	3.094
0.08	0.08	2.075
0.07	0.07	1.908
0.06	0.06	1.858
0.05	0.05	1.865
0.04	0.04	1.882

A13. táblázat: Az optimális integrációs intervallum keresése **D₁=D₂** feltételezéssel Legendre-polinomos diszkretizáció esetén (M=17)

Továbbra is élhetünk azzal a feltételezéssel, hogy a különböző réteghatárookra különböző D paraméterekkel jobb paraméterillesztést kaphatunk. A „trial and error” módszerrel kapott optimum az **A14.** táblázat tanúsága szerint D₁=0.03 és D₂=0.12 mellett jelentkezett.

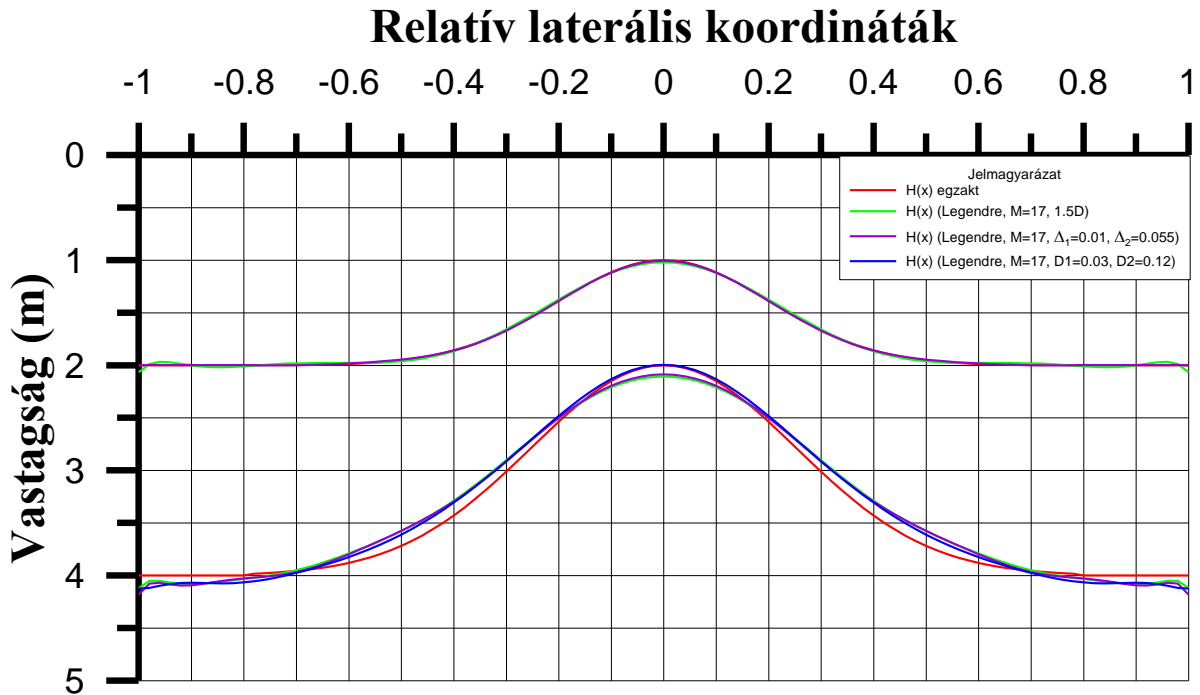
D₁	D₂	D_h függvénytávolság (%)
0.03	0.12	1.597
0.03	0.13	1.604
0.03	0.11	1.607
0.02	0.12	1.612
0.04	0.12	1.618

A14. táblázat: Az optimális integrációs intervallum keresése eltérő **D₁≠D₂** feltételezéssel Legendre polinomos diszkretizáció esetén (M=17)

A módszerrel előállított vastagságfüggvényeket az ugyancsak Legendre-polinomokkal 1.5D, illetve integrálközep inverzió esetén kapott görbékkel hasonlítjuk össze az **A19.** ábrán. Mint látható, a három eljárás lényegében megegyező eredményre vezet, a vastagság-távolság szerinti felbontásban a súlyozott integrálközep módszer mutatkozik jobbnak, amit az **A15** táblázat igazol.

M=17	D_h függvénytávolság (%)
1.5D	2.106
integrálközep	1.898
súlyozott integrálközep	1.597

A15. táblázat: A 1.5D, az integrálközep és a súlyozott integrálközep inverzió eredményeit minősítő jellemzők összehasonlítása Legendre polinomos diszkretizáció esetén (M=17)



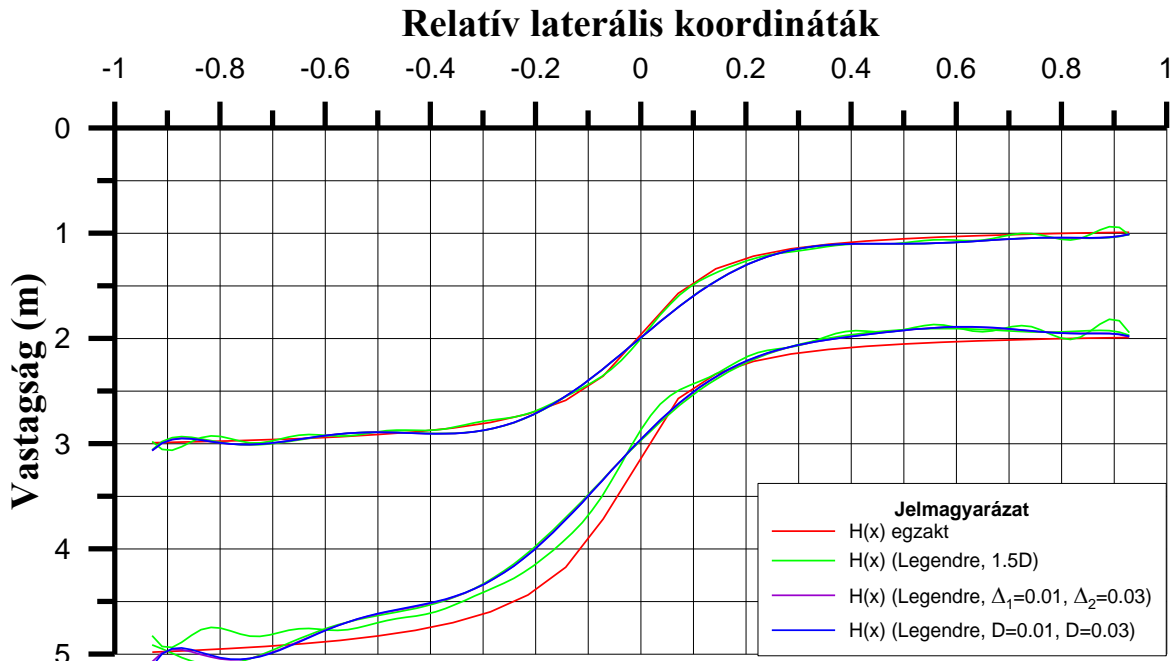
A19. ábra: Az 1.5D, az integrálközép és a súlyozott integrálközép inverzió eredményeinek összehasonlítása Legendre polinomos diszkretizáció esetén ($M=17$)

A Legendre polinomos diszkretizáció esetén a **B** modellen is teszteltük a súlyozott integrálközép módszer alkalmazhatóságát. A **B5.** táblázatban az optimális értékek a $D_1 = 0.01$ és $D_2 = 0.03$ esetén adódtak.

D_1	D_2	D_h függvénytávolság (%)
0.01	0.07	5.527
0.01	0.05	4.355
0.01	0.04	4.077
0.01	0.03	3.975
0.01	0.02	3.981
0.01	0.01	4.032

B5. táblázat: A súlyozott integrálközép inverzió eredményeit minősítő jellemzők Legendre-polinomos diszkretizáció esetén, aszimmetrikus modellen

A vastagságfüggvényeket Legendre-polinomos diszkretizáció alkalmazásával 1.5D, integrálközép és súlyozott integrálközép módszereknél a **B7.** ábrán szemléltetem.



B7. ábra: Az 1.5D, az integrálközép és a súlyozott integrálközép inverzió eredményeinek összehasonlítása Legendre polinomos diszkretizáció esetén

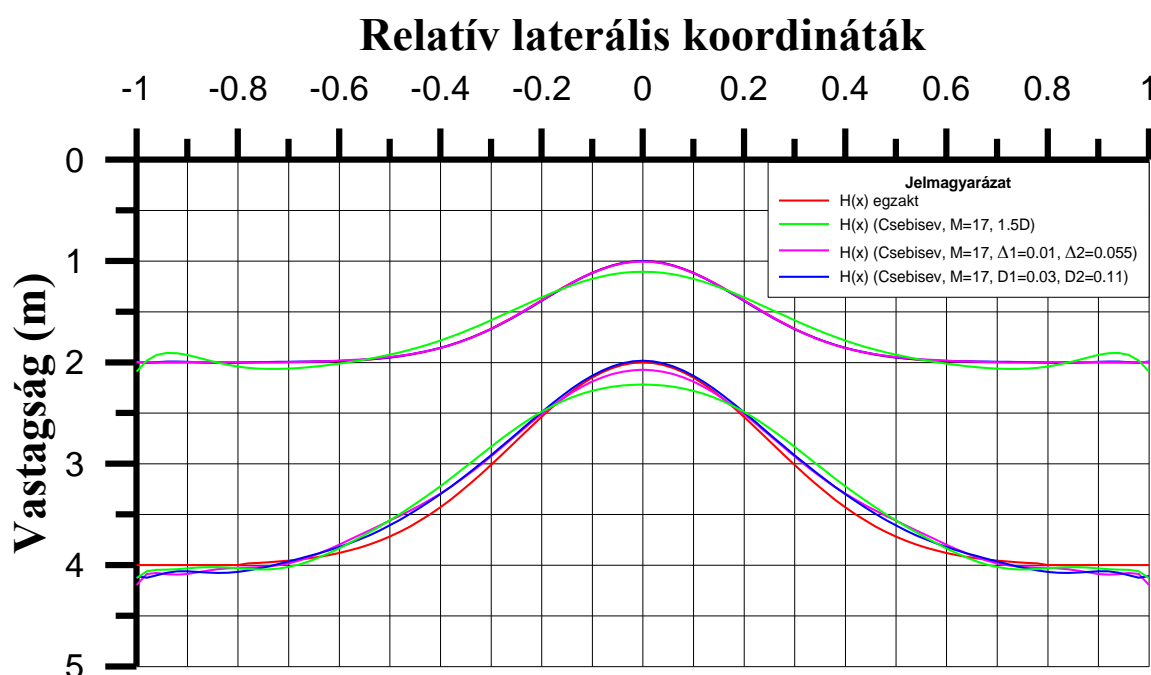
Az optimum keresést a súlyozott integrálközép módszerrel Csebisev-polinomos diszkretizáció esetén is elvégeztük. Korábbi vizsgálataink alapján igazoltnak tekinthetjük, hogy a különböző réteghatárokhoz különböző D értékek tartoznak, ezért a közös D paraméterrel történt optimumkeresést elhagyhatjuk. A D_1 és D_2 paraméterek optimális értékét ($M=17$ mellett) az **A16.** táblázatban mutatjuk be. A módszerrel kapott vastagságfüggvényeket az ugyancsak Csebisev függvényekkel történt diszkretizálás mellett a 1.5D illetve az integrálközép módszerek esetén előállított görbékkel az **A20.** ábrán hasonlítjuk össze. Itt is észrevehető, hogy a három eljárás hasonló eredményre vezet, a vastagságtávolság szerinti felbontásban azonban a súlyozott integrálközép módszer mutatkozik jobbnak, amit az **A17.** táblázat igazol.

D_1	D_2	D_h függvénytávolság (%)
0.03	0.11	1.592
0.03	0.12	1.596
0.03	0.13	1.624
0.02	0.11	1.597
0.04	0.11	1.598

A16. táblázat: A súlyozott integrálközép inverzió eredményeit minősítő jellemzők Csebisev-polinomos diszkretizáció esetén ($M=17$)

M=17	D_h függvénytávolság (%)
1.5D	4.275
integrálközep	1.850
súlyozott integrálközep	1.592

A17. táblázat: A 1.5D, az integrálközep és a súlyozott integrálközep inverzió eredményeit minősítő jellemzők Csebisev-polinomos diszkretizáció esetén (M=17)

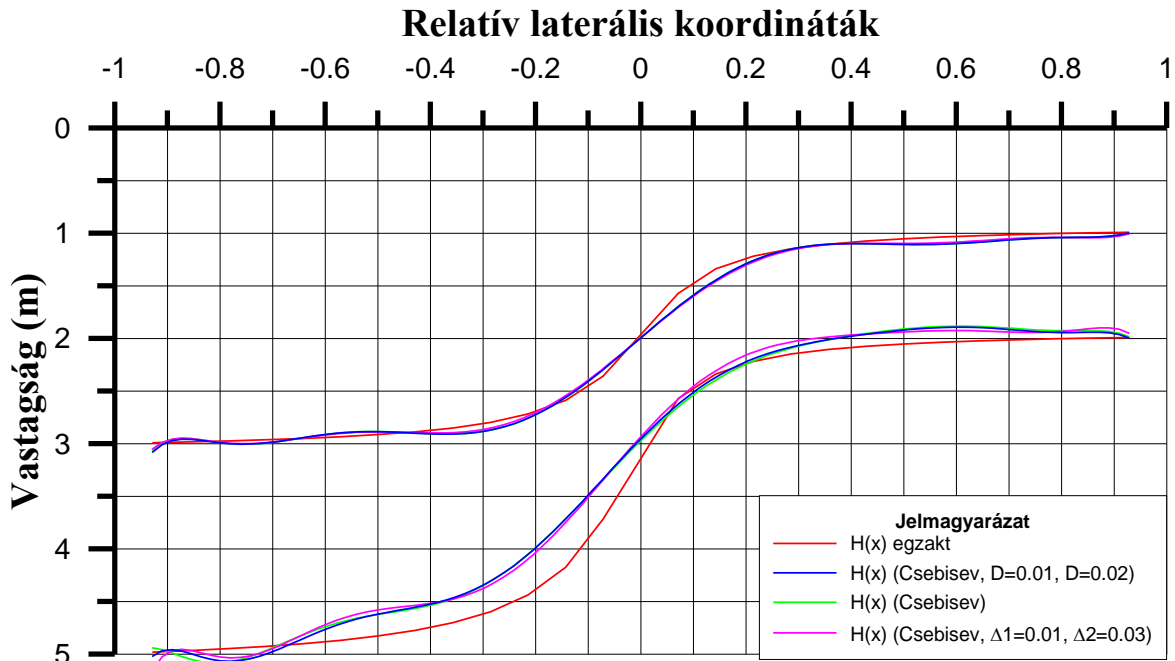


A20. ábra: A 1.5D, az integrálközep és a súlyozott integrálközep inverzió eredményeinek összehasonlítása Csebisev-polinomos diszkretizáció esetén (M=17)

Csebisev-polinomos diszkretizációval alkalmazott súlyozott integrálközep módszerrel a **B modell**t is vizsgáltuk. A D paraméter optimumát kereső eljárás eredményeit **B6.** táblázat mutatja be. Az optimális értékek $D_1 = 0.01$ és $D_2 = 0.02$ értékeknek adódtak. A vastagsággörbék lefutása a **B8.** ábrán látható.

D_1	D_2	D_h függvénytávolság (%)
0.01	0.06	5.313
0.01	0.05	4.520
0.01	0.04	4.655
0.01	0.03	3.992
0.01	0.02	3.981
0.01	0.01	4.031

B6.táblázat: A súlyozott integrálközep inverzió eredményeit minősítő jellemzők Csebisev-polinomos diszkretizáció esetén, aszimmetrikus modellen



B8. ábra: A 1.5D, az integrálközép és a súlyozott integrálközép inverzió eredményeinek összehasonlítása Csebishev-polinomos diszkretizáció esetén

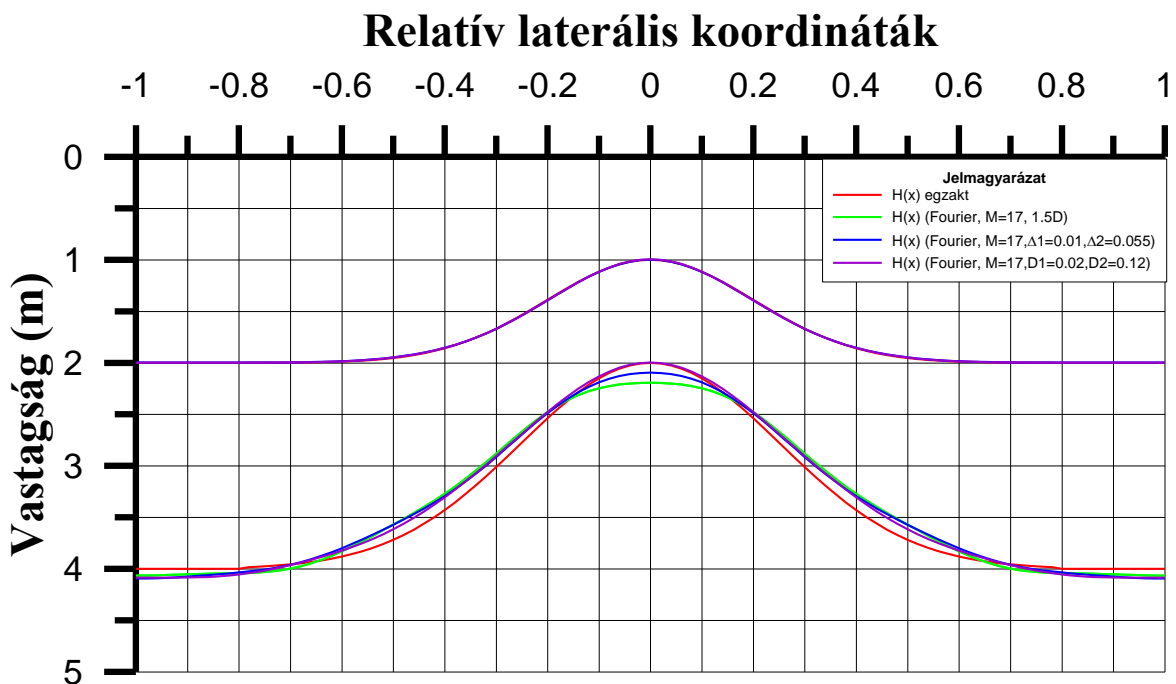
Amint azt a 1.5D és az integrálközép módszerek vizsgálatánál is tettük a Fourier soros diszkretizálást a súlyozott integrálközép módszer fejlesztése során is alkalmaztuk. A súlyfüggvény D paraméterének rétegenkénti változását feltételezve elsőként ennek optimumát kerestük. Az eredményt az **A18.** táblázat mutatja. Mint látható a D_1 , D_2 paraméterek közel vannak a Legendre-, illetve Csebishev-polinomos diszkretizációk mellett kapott értékekhez. Ez részben az integrálközép módszer stabilitását is mutatja, hiszen a paraméterek nem függenek lényegesen az alkalmazott bázisfüggvényektől. (Megjegyzendő azonban, hogy mindhárom bázisfüggvény rendszer ortogonális, vagyis inverziós alkalmazás szempontjából előnyösek.) A Fourier soros diszkretizálás mellett 1.5D, integrálközép, illetve súlyozott integrálközép módszerek által adott vastagságfüggvény-illeszkedést az **A19.** táblázat és az **A21.** ábra mutatja be. Az ábrán azt láthatjuk, hogy a három eljárás hasonlóan jó inverziós eredményt szolgáltat. Az illeszkedés pontosságát mérő D_h vastagságfüggvény-távolság számszerűen is jellemzi a paraméterbecslés jóságát. Így az **A19.** táblázat alapján megállapíthatjuk, hogy a három módszer közül a súlyozott integrálközép adja a pontosabb eredményt.

D_1	D_2	D_h függvénytávolság (%)
0.02	0.12	1.604
0.03	0.11	1.613
0.03	0.12	1.608
0.03	0.13	1.622

A18. táblázat: A súlyozott integrálközep inverzió eredményeit minősítő jellemzők Fourier soros diszkretizáció esetén ($M=17$)

$M=17$	D_h függvénytávolság (%)
1.5D	3.868
integrálközep	1.900
súlyozott integrálközep	1.604

A19. táblázat: Az 1.5D, az integrálközep és a súlyozott integrálközep inverzió eredményeit minősítő jellemzők összehasonlítása Fourier soros diszkretizáció esetén ($M=17$)

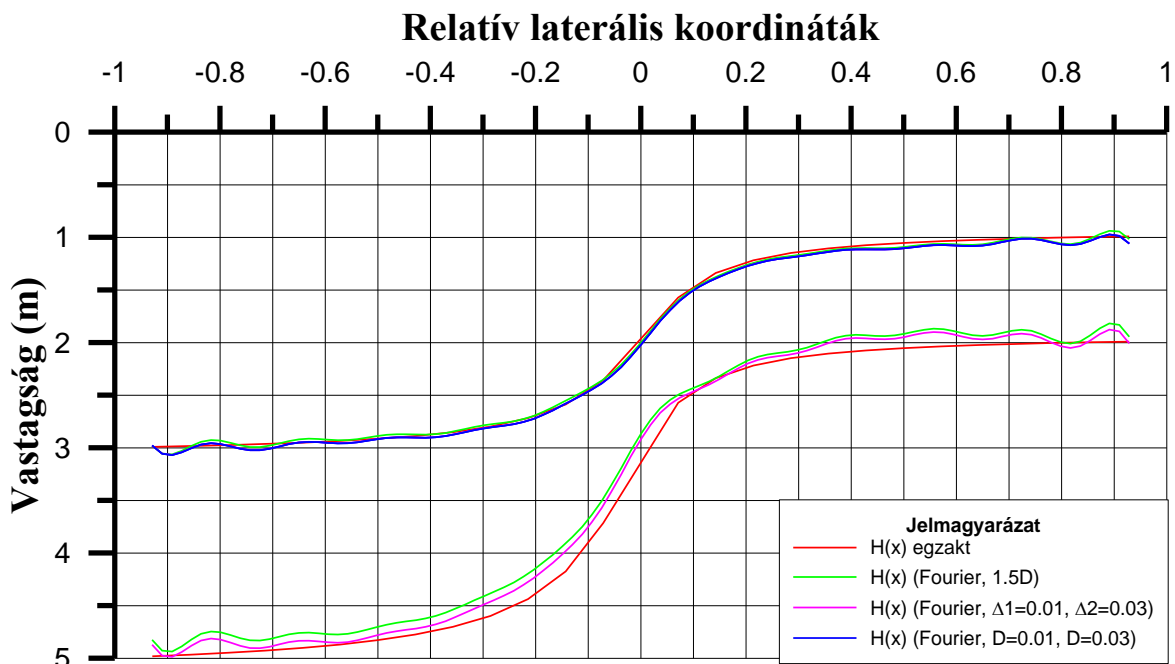


A21. ábra: A 1.5D, az integrálközep és a súlyozott integrálközep inverzió eredményeinek összehasonlítása Fourier soros diszkretizáció esetén ($M=17$)

A Fourier sorral diszkretizált súlyozott integrálközep módszerrel vizsgálatokat végeztünk az aszimmetrikus **B** modellen is. A D paraméter optimumát kereső eljárás eredményeit **B7.** táblázat mutatja be. Az optimális értékek $D_1 = 0.01$ és $D_2 = 0.03$ értékeknek adódtak. A vastagsággörbék lefutása a **B9.** ábrán látható.

D_1	D_2	D_h függvénytávolság
0.01	0.06	2.986
0.01	0.05	2.906
0.01	0.04	2.867
0.01	0.03	2.860
0.01	0.02	2.879

B7. táblázat: A súlyozott integrálközep inverzió eredményeit minősítő jellemzők Fourier-soros diszkretizáció esetén, aszimmetrikus **B** modellen



B9. ábra: Az 1.5D, az integrálközep és a súlyozott integrálközep inverzió eredményeinek összehasonlítása Fourier-soros diszkretizáció esetén (**B** modell)

Ebben a fejezetben a súlyozott integrálközep eljárást mutattam be a geoelektromos mérési vonal mentén (laterálisan) lassan változó földtani szerkezeten. Az eljárás az integrálközep módszer továbbfejlesztésének tekinthető és fizikailag azt a kézenfekvő elvárást fejezi ki, hogy az integrálközep számítása során mérési adataink oldal irányú érzékenységét vegyük figyelembe. Ezt a várákozást egy exponenciálisan lecsengő súlyfüggvény bevezetésével teljesítettük, amelynek D paraméterével az oldalirányú érzékenység skálázható. A vastagságfüggvények diszkretizációját Fourier sorral, valamint Legendre, illetve Csebisev polinomokkal valósítottam meg. Az integrációs intervallum vizsgálata során megállapítottam a D paraméter különböző mélységű réteghatárokhoz tartozó optimális értékét. Bemutattam, hogy az eljárás a 1.5D inverziónál, illetve az integrálközep módszerénél jobb paraméterbecslést eredményez mind a Fourier sorral, mind

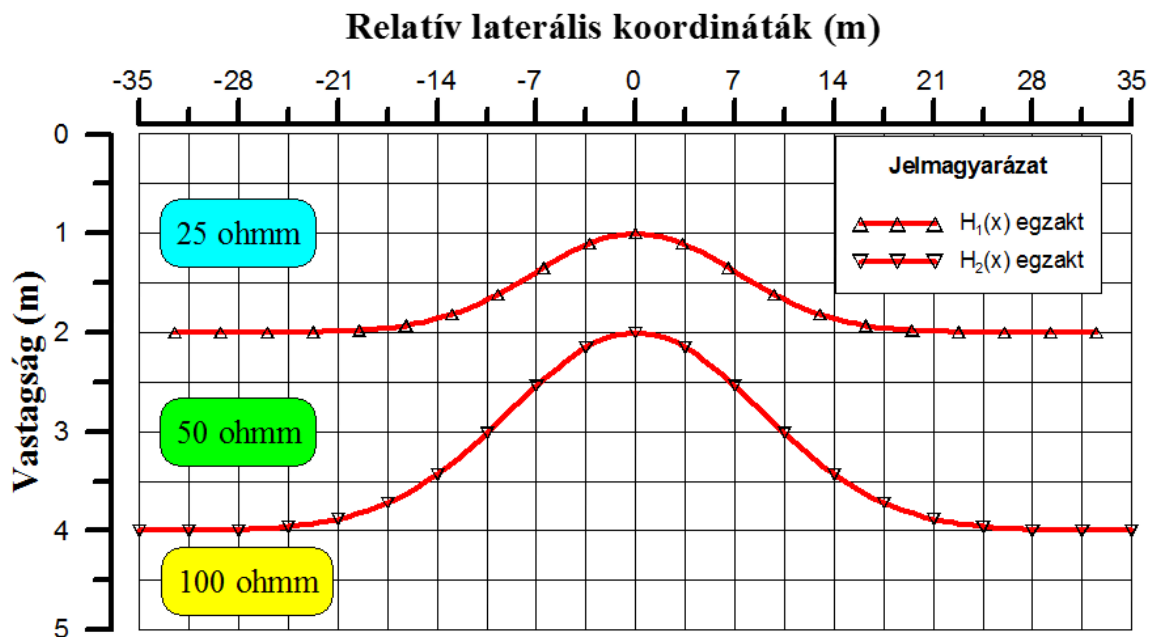
a Legendre illetve Csebisev polinomokkal diszkrétizált dőlésirányú szelvények inverziós feldolgoása során (**3. tézis**).

Az inverziós eredmény minősítésére a hibaterjedés törvénye alapján levezettem a súlyozott integrálközep módszer keretében a lokálisan 1D előremodellezésbe bevitt vastagságok kovariancia és korrelációs mátrixát (**4. tézis**).

4. A lokálisan 1D közelítés pontossága 2D modellen

Az előző fejezetben a lokálisan 1D előremodellezésre alapozott, a rétegparamétereket sorfejtéssel diszkrétizáló inverziós eljárásainkat a geoelektromos mérési vonal mentén (laterálisan) lassan változó földtani szerkezeten teszteltük. Ebben a fejezetben vizsgálatainkat valódi 2D, azaz laterálisan jelentős változást mutató modellen folytatjuk.

Vizsgálataink céljából az **C1.** ábrán látható modellt vettük fel, amelynél a korábban az **A modellen** +/- 210 m-en feltételezett változás +/- 35 méteren következik be. A modellt a továbbiakban **C modellen** nevezzük. A látszólagos fajlagos ellenállás görbéket példa szelvényekkel a függelék **F3.** ábra mutatja be.



C1. ábra: A numerikus vizsgálatok céljára felvett **C modell**

A vastagságfüggvények a modell mindkét szélén 10 m hosszúságban állandó értéket vesznek fel ($H_1=2\text{m}$, $H_2=4\text{m}$). A +/- 25 m belső intervallumon a vastagságok laterális változását a

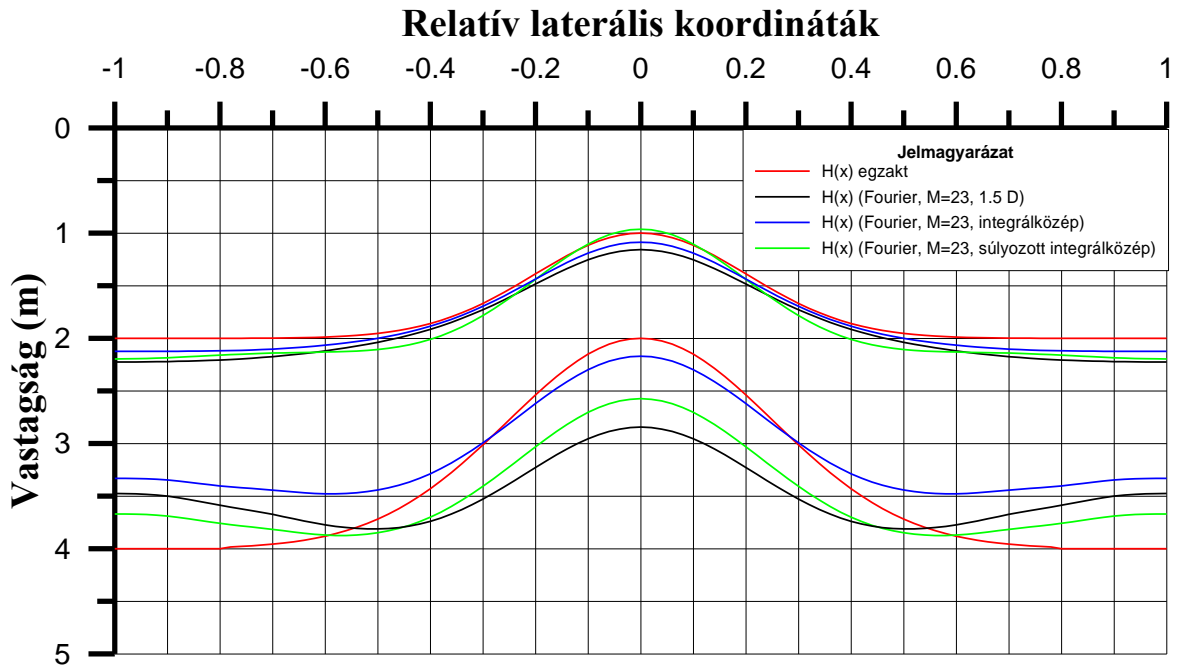
$$H_1(x) = 2 - \exp(-(2.5x/25)^2) \text{ és a } H_2(x) = 4 - 2 \exp(-(2x/25)^2)$$

függvények adják. A 70 m-es vizsgálati területen dőlésirányban 2.5 méterenként Schlumberger elrendezésű mérést tételeztünk fel (AB/2= 1.6, 2.0, 2.5, 3.2, 4.0, 6.4, 8.0, 10.0, 12.0, 14.0, 17.0, 20.0, 25.0, 30.0, 35.0 m terítési távolságokkal). Egy-egy mérési ponthoz tehát 19 mérési adat tartozik, a mérés teljes intervalluma 70 m. A látszólagos fajlagos ellenállás adatokat Spitzer (1995) Gyulai Ákos Professzor által továbbfejlesztett FD programjával állítottam elő. Az adatokkal elvégzett inverziós vizsgálatokban az eredmény minőségét jellemző paramétereket (átlag variancia, korrelációs átlag, adattávolság, vastagság távolság) is számítottam, következtetéseimet ezekre alapoztam.

A **C modellre** vonatkozó vizsgálataim során M=23 mellett Fourier soros diszkretizálást alkalmazva a 1.5D, az integrálközép, ill. a súlyozott integrálközép módszerekkel végeztem. Az eredmények összehasonlítását a **C2.** ábra és a **C1.** táblázat alapján tehetjük meg. Mint látható, a D_h függvény-távolságok az **A modellnél** látottakhoz képest jelentősen megnövekedtek, ami - tekintve a modell valódi 2D jellegét - nem meglepő.

Legjobb eredményt ($D_h = 8.08\%$) az integrálközép módszer adta. Az integrációs tartományokat az **A modellnél** kapott értékek skálázásával vettük fel. (Ott azt találtuk, hogy az 50 m terítési hosszra vetítve ezek aránya 4%, ill. 24%.) Ennek alapján (a +/-1 koordináták között felvett koordináta rendszerben) a $\Delta_1 = 0.6$ és $\Delta_2 = 0.35$ integrációs intervallumokkal végeztük az integrálközép módszer esetében inverziót. A legkevésbé pontosnak a 1.5D módszer bizonyult, azonban az ezzel kapott 15.1% relatív vastagságtávolság sem mondható rossznak.

A **C2.** ábra alapján arra következtethetünk, hogy mindhárom eljárás gyakorlatilag elfogadható pontossággal közelíti a 2D modellt, annak ellenére, hogy az előre modellezés lokálisan 1D eljárással történt. Figyelembe véve a néhányszor tíz másodperces futási időt, az eredmények gyakorlati értéke figyelemre méltó. A lehetséges alkalmazások között itt is meg kell említenünk a startmodell előállítását a magasabb rendű (2D, 2.5D) inverziós eljárások számára. Ebben a vonatkozásban mindhárom, a fentiekben tárgyalt közelítő inverziós módszer jó eséllyel alkalmazható.



C2. ábra: Az 1.5D, az integrálközep és a súlyozott integrálközep inverzió eredményeinek összehasonlítása Fourier soros diszkrétizáció esetén ($M=23$)

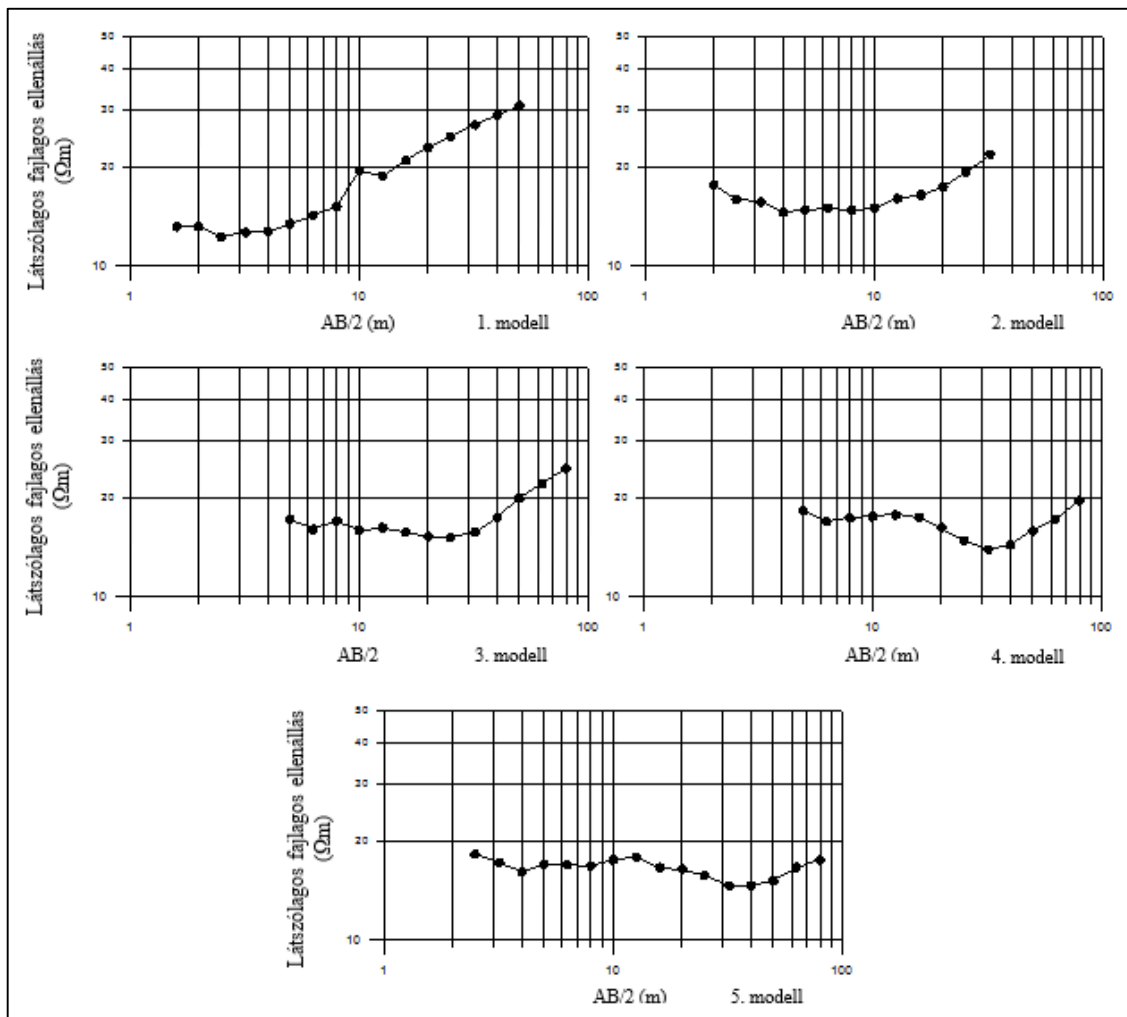
M=23	D_h függvénytávolság (%)
1.5D	15.12
integrálközep	8.08
súlyozott integrálközep	10.79

C1. táblázat: Az 1.5D, az integrálközep és a súlyozott integrálközep inverzió eredményeit minősítő jellemzők Fourier soros diszkrétizáció esetén ($M=17$)

5. A súlyozott integrálközép módszer tesztelése terepi adatokon

A szintetikus adatrendszeren végrehajtott eredményes számítások után vizsgálataimat terepi adatrendszeren is elvégeztem. Ehhez Korlát községnél mért Vertikális Szondázási adatokat használtam fel, melyeken korábban Gyulai és Ormos (1997) sikeresen tesztelte az általuk fejlesztett 1.5D inverziós módszert és a kapott eredményeket részletesen publikálta (Gyulai és Szabó 2014). Mindezen előzmények alapján a súlyozott integrálközép módszerének valódi mérési adatokon történő alkalmazhatóságának bizonyítására szintén ezen adatrendszert választottam.

A felszíni kibúvásban végződő andezit és andezit tufa 2D szerkezet felett, csapásirányú terítésben mért Vertikális Elektromos Szondázásokat, Schlumberger elrendezésben végezték 100 méteres szelvény mentén, 5 mérési pontban. A látszólagos fajlagos ellenállás görbéket az egyes szelvények esetében a **D1.** ábra mutatja be.

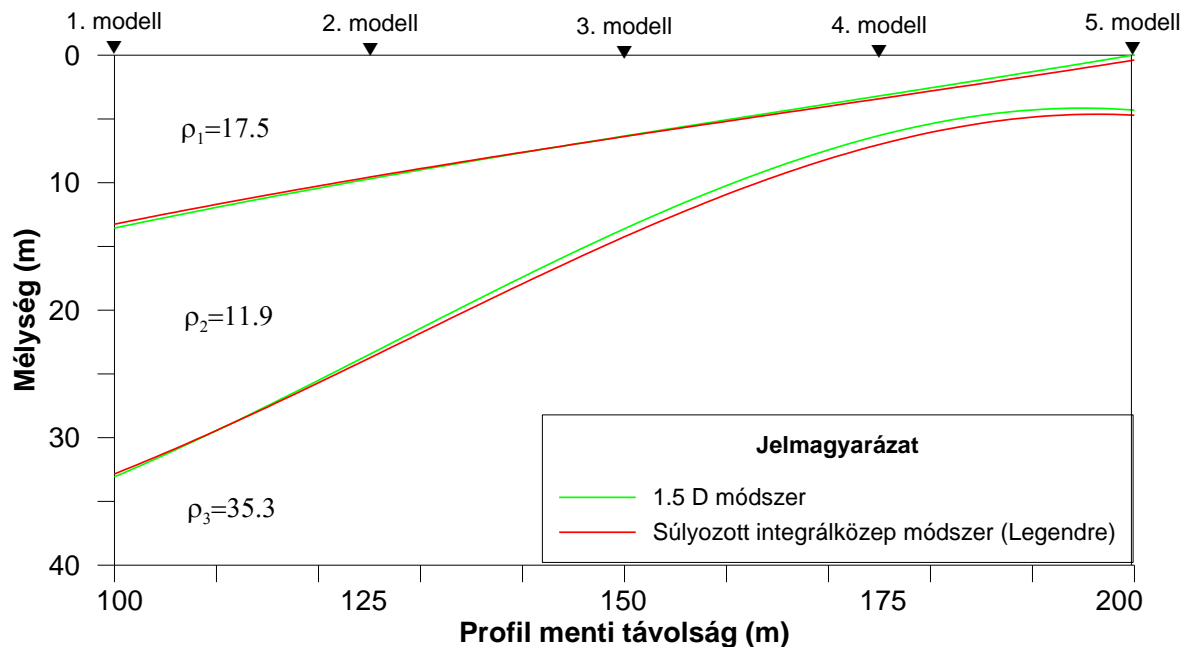


D1. ábra: A Korlát községnél mért VESZ pontok fajlagos ellenállás görbéi

A terepi példa esetében Gyulai (2004), Gyulai és Szabó (2014) cikkekben szereplő kiértékelések alapján feltételezzük a fajlagos ellenállás laterális homogenitását. Vizsgálatainkat Legendre polinomos diszkretizáció alkalmazásával végeztük, ezért a koordinátákat a +/-1 intervallumra transzformáltuk.

A 2D háromréteges modellen először 1.5D inverziós vizsgálatot hajtottunk végre. A közelítést negyedfokú Legendre polinommal diszkretizált inverziós eljárással végeztük. Ekkor az adatérbeli relatív távolságként 2.848%-os értéket kaptunk, a vastagság függvényeket a D2 ábrán a zöld színnel jelölt görbék mutatják.

Az adatrendszer feldolgozását súlyozott integrálközep módszerrel is elvégeztük. Az eljárásban szintén Legendre polinomos diszkretizációt alkalmaztunk, továbbra is $M=4$ fokszám mellett. Az integrációs intervallum vizsgálata során ebben az esetben a D paraméter különböző mélységű réteghatárokhoz tartozó optimális értéke $D_1=0.015$ és $D_2=0.5$ lett. Ekkor 2.827% adattérbeli relatív távolságot értünk el. A vastagság függvényeket a D2 ábrán a piros színnel jelölt görbék mutatják. A két eredmény igen közel van egymáshoz, így megállapíthatjuk, hogy mindkét módszer alkalmas a szerkezet kimutatására. A kapott eredmények csaknem megegyeznek a Gyulai (2004) analitikus előremodellezésen alapuló 2 dimenziós inverziós kiértékelésével.



D2. ábra: A 1.5 D és a Súlyozott integrálközep módszer vastagságfüggvényei

Ebben a fejezetben a súlyozott integrálközep eljárást terepi adatokon is teszteltem. A vizsgálatban használt geoelektromos adatrendszert a Miskolci Egyetem Geofizikai

Tanszékének munkatársai Korlát község mellett mérték egy fokozatosan mélyülő andezit, andezittufa feletti szelvényben. A 2D szerkezetet háromrétegesnek tételeztem fel Gyulai és Szabó (2014) publikációja alapján. Az integrációs intervallum vizsgálata során megállapítottam a D paraméter különböző mélységű réteghatárokhoz tartozó optimális értékét és ennek felhasználásával negyedfokú Legendre-polinommal történő diszkretizáció alkalmazásával közelítettem a vastagságfüggvényeket. Eredményeim jó egyezést mutattak a Gyulai és Szabó (2014) által közölt, 1.5D inverzió módszerével meghatározott vastagságfüggvény görbékkel. A 1.5D inverziós eljárásához képest kicsivel jobb közelítést értem el a súlyozott integrálközép módszer alkalmazásával. Továbbá az új módszer eredménye jó egyezést mutat a 2D előremodellezésen alapuló inverzió eredményével, melyet Gyulai (2004) publikált. Megállapítottam, hogy az új módszer alkalmas terepi mérések kiértékelésére (**5. tézis**).

Összefoglalás

Dolgozatomban lokálisan 1D előremodellezést alkalmazó inverziós eljárások alkalmazhatóságát vizsgáltam laterálisan inhomogén szerkezet fölött, dőlés irányú terítésben mért adatok való feldolgozása terén. Az ismert 1.5D inverziós módszer fejlesztése céljából vizsgáltam további bázisfüggvények (ortogonális polinomok) bevonási lehetőségét az inverziós eljárásba. Elsősorban a hatványfüggvények kiváltására törekedtem, ezért a módosított inverziós eljárásban Legendre és Csebisev polinomokat alkalmaztam a diszkretizálás során.

A vizsgálatok azt mutatták, hogy a két bázisfüggvény-rendszer - a Fourier sorfejtéshez hasonlóan - alkalmas a laterálisan inhomogén szerkezet felett dőlésirányú szelvényeken mért adatok 1.5D inverziójában a vastagság függvények diszkretizálására. Megállapítottam, hogy míg az egyszerű hatványfüggvények korlátozott mértékben alkalmazhatók a dőlésirányú szelvények mentén mért látszólagos fajlagos ellenállás adatok 1.5D inverziójában, addig az ortogonális, illetve súlyfüggvényre ortogonális Legendre és Csebisev polinomok alkalmazásával stabil eredményre jutunk. A vizsgálataimat Fourier soros diszkretizálással is elvégeztem. Megmutattam, hogy az ortogonális illetve súlyfüggvényre ortogonális polinomok alkalmazásával a Fourier soros diszkretizálásra alapozott 1.5D módszerrel lényegében egyenértékű inverziós eljárást definiálhatunk. (Ide vonatkozó eredményeim az 1. tézisben foglaltam össze.)

Numerikus vizsgálatokat végeztem a - korábban csapásirányú mérésekhez tervezett - általánosított sorfejtéses eljárás módosítási lehetőségének céljából, hogy az alkalmas legyen dőlés irányú terítések hatékony feldolgozására is. A diszkretizációt Fourier sorral, Legendre és Csebisev polinomokkal valósítottam meg. Az integrációs intervallum vizsgálata során megállapítottam, hogy a különböző mélységű réteghatárok esetén más-más integrációs intervallum választása szükséges. Vizsgálataim azt mutatják, hogy az általánosított sorfejtéses eljárás a 1.5D inverziójával azonos értékű paraméterbecslést ad eredményül a dőlésirányú szelvényeken mért adatok esetén. (Ide vonatkozó eredményeimet a 2. tézisben foglaltam össze.)

Bevezettem a súlyozott integrálközep eljárást, mely egy exponenciálisan lecsengő súlyfüggvény bevezetésével figyelembe veszi, hogy az integrálközep számításában a középponttól távolodva az oldal irányú érzékenység csökken. Számszerűen igazoltam, hogy az eljárás a 1.5D inverziónál, illetve az integrálközep módszerénél jobb paraméterbecslést eredményez mind a Fourier sorral, mind a Legendre illetve Csebisev polinomokkal diszkretizált dőlésirányú szelvények inverziós feldolgozása során. (Ide vonatkozó eredményeimet a 3. tézisben foglaltam össze.)

Az inverziós eredmény minősítésére a hibaterjedés törvénye alapján levezettem az integrálközep, ill. a súlyozott integrálközep módszerek lokálisan 1D előremodellezésében szereplő vastagságok kovariancia és korrelációs mátrixát és az ebből származó varianciákat. (Ide vonatkozó eredményeimet a 4. tézisben foglaltam össze.)

Numerikus vizsgálataimat kiterjesztettem olyan laterálisan változó modellre is, amely szignifikánsan kétdimenziós. A modellen a lokálisan 1D előremodellezést alkalmazó (1.5D, integrálközep és súlyozott integrálközep) eljárásokkal végzett inverziós futtatások műszakilag elfogadható eredményt adtak. Figyelembe véve, hogy a számítási idő néhányszor tíz másodperc, a szigorúan 2D inverzióhoz képest a kisebb pontosságot a gyorsaságbeli tekintélyes különbség messzemenően kompenzálja a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából.

A súlyozott integrálközep módszer alkalmazhatóságát a Korlát község közelében mért terepi adatrendszeren vizsgáltam. Eredményeimet az 1.5 D módszerrel és a Gyulai (2004) által publikált, 2D előremodellezésen alapuló inverzió eredményével összevetve igazoltam az új eljárás gyakorlati alkalmazhatóságát. (Ide vonatkozó eredményeimet az 5. tézisben foglaltam össze.)

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet fejezem ki Dr. Gyulai Ákos professzor úrnak és Dr. Ormos Tamás egyetemi magántanárnak a szakmai vezetésért és mindenkori segítségükért, amivel támogatták munkámat.

Köszönettel tartozom Dr. Szűcs Péter dékán úrnak és Dr. Dobróka Mihály professzor úrnak, hogy támogatták a TÁMOP-4.2.2.B-15/1/KONV-2015-0003 jelű projektben való részvételemet, segítve ezzel a doktori dolgozatom elkészítését.

Köszönöm a Geofizikai Tanszék munkatársainak a munkámhoz nyújtott szakmai, erkölcsi támogatást és a barátságos légkört. Külön köszönöm Dr. Szabó Norbert Péter docens úrnak szakmai tanácsait és Kiss Anettnek dolgozatom gondos áttekintését.

Értekezésem a TÁMOP-4.2.2.B-15/1/KONV-2015-0003 jelű projekt részeként, Széchenyi2020 program keretében az Európai Unió és az Európai Szociális Alap támogatásával készült, mely biztosította a lehetőséget kutatásaim elvégzésre és a doktori értekezésem elkészítésére. A támogatásért Köszönetemet fejezem ki.

Végül, de nem utolsó sorban köszönöm Édesanyámnak, családomnak és barátaimnak a biztatását és türelmes, megértő támogatását.

Irodalomjegyzék

- Aki K., Richards P. 1980: Quantitative Seismology- Theory and Methods. Vol.2, W.H.Freeman Co., San Fransisco.
- Auken E., Christiansen A.V. 2004: Layered and laterally constrained 2D inversion of resistivity data. *Geophysics*, Vol. 69, NO. 3 (May-June 2004); P. 752–761.
- Christiansen, A. V. és Auken, E. 2004: Optimizing a layered and laterally constrained 2D inversion of resistivity data using Broyden's update and 1D derivatives: *Journal of Applied Geophysics*, 56, 247-261. Paper (pdf - 0.9 Mb).
- Dobróka M. 1987: Love seam-waves in a horizontally inhomogeneous three-layered medium. *GEOPHYSICAL PROSPECTING* 35:(5) pp. 502-516.
- Dobróka M. 1988: On the absorption-dispersion characteristics of channel waves propagating in coal seams of varying thickness. *GEOPHYSICAL PROSPECTING* 36: pp. 318-331.
- Dobróka M., Gyulai Á., Ormos T., Csókás J., Dresen L. 1991: Joint inversion of seismic and geoelectric data recorded in an under-ground coal mine. *Geophysical Prospecting* 39, 643-665.
- Dobróka M. 1994: Változó rétegvastagságú inhomogén szeizmikus hullámvezetőben terjedő Love-típusú hullámok diszperziós relációja; Az abszorpció-s-diszperziós jellemzők inverziója, Doktori értekezés, Miskolc.
- Dobróka M. 1995: Együttes inverziós algoritmusok bevezetése a mélyfúrési geofizikai értelmezésbe. Zárójelentés. Miskolci Egyetem, Geofizikai Tanszék, Miskolc.
- Dobróka M. 1996: Változó rétegvastagságú inhomogén szeizmikus hullámvezetőben terjedő Love-típusú hullámok diszperziós relációja; Az abszorpció-s-diszperziós jellemzők inverziója, Doktori értekezés, Miskolc Egyetem, Miskolc.
- Dobróka M. 2001: Bevezetés a geofizikai inverzióba. Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc.
- Dobróka M., Szabó P. N. 2005: Combined global/linear inversion of well-logging data in layer-wise homogeneous and inhomogeneous media. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, Vol. 40(2), pp. 203-214, DOI: 10.1556/AGEOD.40.2005.2.7.

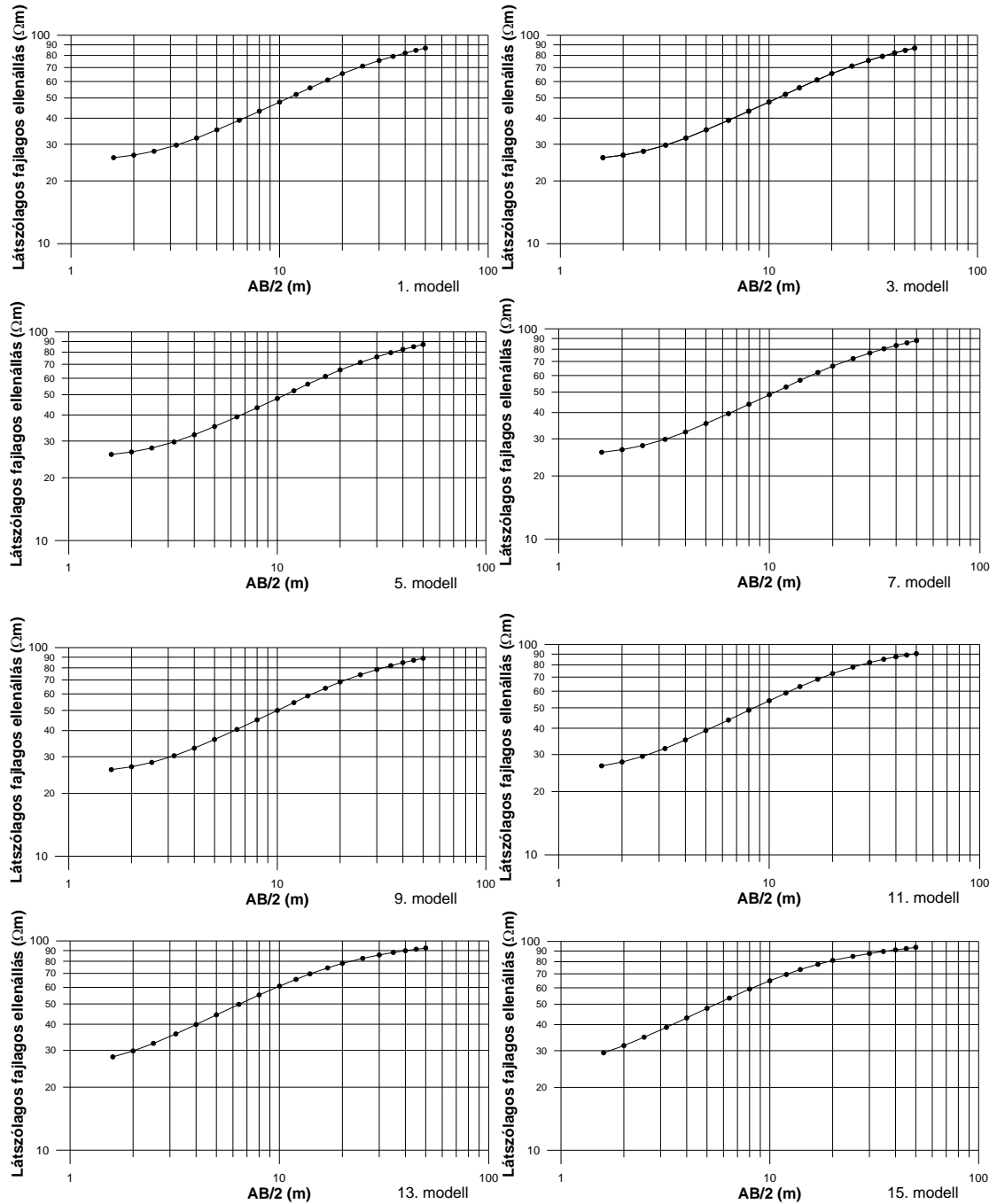
- Dobróka M., Szabó N.P. 2010: Sorfejtéses inverzió II.: Mélyfúrési adatok feldolgozása intervallum inverziós eljárással. Magyar Geofizika. Vol. 51, pp.25-42.
- Dobróka M., Práczser E., Kavanda R., Turai E. 2013: Quick imaging of MT data using an approximate inversion algorithm. Acta Geodaetica et Geophysica, Vol.48, pp.17-25.
- Ghos D. P. 1971: Inverse filter coefficient for comulation of apparent resistivity standard curves for a horizontally stratified earth. Geophysical Prospecting 19, pp.:769-775.
- Gyulai Á. 1989: Parameter sensitivity of underground DC measurements. Geophysical Transactions, 35(3), 209-225.
- Gyulai Á., Ormos T. 1997: Interpretation of vertical electrical sounding curves with the 1.5-D inversion method. Magyar Geofizika 38. pp. 25-36.
- Gyulai Á., Ormos T. 1998: Újabb eredmények a VESZ adatok 1.5-D inverziós kiértékelésében. Magyar Geofizika, 38. 257-264.
- Gyulai Á. és Ormos T. 1999: A new procedure for the interpretation of VES data: 1.5-D simultaneous inversion method. Journal of Applied Geophysics 41, 1-17.
- Gyulai Á. 2001: 2D földtani szerkezetek interpretációja együttes geoelektromos inverziós módszerekkel. MTA Doktori Értekezés, Miskolc
- Gyulai Á. 2004: 2-D simultaneous inversion method to determine dipping geological structures. Geophysical Transactions 2004. Vol.44. Nos.-3-4, pp. 257-271
- Gyulai Á., Ormos T., Dobróka M. 2010: A quick 2-D geoelectric inversion method using series expansion. Journal of Applied Geophysics, No. 72, 232-241.
- Gyulai Á, Szabó N P 2014: Series expansion based geoelectric inversion methodology used for geoinveronmental investigations, FRONTIERS IN GEOSCIENCES 2: (1) pp. 11-17.
- Inman J. R. 1975: Resistivity inversion with ridge regression. Geophysics 40, 798-817.
- Inman J. R., Ryu J., Ward S.H. 1975: Resistivity inversion. Geophysics 38, 1088-1108.
- Jackson D.D. 1972: Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 28, 97-109.
- Jackson D.D. 1979: The use of a priori data to resolve non-uniqueness in linear inversion. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 57, 137-157.

- Kavanda R. Gyulai Á., Ormos T. 2006: Combined Function Inversion Method. 68th EAGE Conference & Exhibition , Vienna, Austria.
- Kavanda R. 2007: Results of single and function inversion of resistivity data for hydrogeological application. European Geosciences Union, General Assembly 2007, Vienna, Austria.
- Kis M. 1998: Felszínközeli földtani szerkezetek vizsgálata szeizmikus és egyenáramú geoelektromos adatok együttes inverziójával. PhD értekezés. Miskolci Egyetem, Geofizikai Tanszék.
- Kis M. 2002: Generalised Series Expansion (GSE) used in DC geoelectric-seismic joint inversion. Journal of Applied Geophysics, vol.50, pp.:401-416.
- Koefoed O. 1979: Geosounding principles, resistivity sounding measurements. Amsterdam.
- Lines L., Treitel S. 1984: Tutorial: a review of least squares inversion and its application to geophysical problem. Geophysical Prospecting 32, pp.:159-186.
- Loke, M.H., Barker, R.D. 1996: Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudo-sections by a quasi-Newton method. Geophysical Prospecting, 44: 131-152.
- Menke W. 1984: Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory. Academic Press Inc.
- Meskó A. 1976: Geofizikai inverz feladatok megoldása (Általános elvek, korlátok és iterációs algoritmusok. Magyar Geofizika 17. pp.:133-141.
- Pethő Gábor, Bálint T, Ficsór Lajos, Gyulai Ákos, Ormos Tamás, Prácsér E, Török I, Turai Endre, Varga Mihály 2002: Felszínközeli inhomogenitások geofizikai kimutathatósági vizsgálata modellezési eljárásokkal MAGYAR GEOFIZIKA 43: pp. 62-63. (2002)
- Prácsér E. 2007: Modellparaméterek alkalmas megválasztása szelvénymenti geofizikai mérések inverziójához, Doktori (PhD) értekezés, Miskolci Egyetem.
- Salát P., Tarcsay Gy., Cserepes L., Vermes M., Drahos D. 1982: Statistical Methods in Geophysical Interpretation. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Salát P., Tarcsai Gy., Cserepes L., Vermes M. és Drahos D. 1992: A geofizikai interpretáció információs-statisztikus módszerei. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Spitzer K. 1995: A 3D finite-difference algorithm for DC resistivity modelling using conjugate gradient methods. Geophysical journal International 123, 903-914.

- Szabó N. P. 2004: Mélyfúrési geofizikai adatok modern inverziós módszerei. PhD értekezés. Miskolci Egyetem.
- Szabó N.P., Dobróka M., Kavanda R. 2013: Cluster analysis assisted float encoded genetic algorithm for a more automated characterization of hydrocarbon reservoirs. Intelligent Control and Automatization. Vol.4, pp. 362-370.
- Szegedi H. 2015: Inverziós módszerfejlesztés a Fourier transzformált zajérzékenységének csökkentésére. PhD értekezés. Miskolci Egyetem.
- Tarantola A. 1987: Inverse Problem Theory, Methods of Data Fitting and Model Parameter Estimation Elsevier, Amsterdam.
- Tarantola A. 2005: Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation.
- Török I, Kis M. 2001: GSE and weighted GSE inversion in the interpretation of DC geoelectric data Publications of the University of Miskolc. Series A-Mining. Vol. 59: pp. 69-80.
- Turai E., Dobróka M. 2001: A new method for the interpretation of induced polarization data - the TAU-transform approach. Publications of the University of Miskolc. Series A-Mining. Vol.56. pp197-202.
- Turai E., Dobróka M. 2002: A new tool for surveying waste site, oil reservoir and oil contaminated soil: the Generalized TAU Transform method. Intellectual Service for Oil & Gas Industry: Analysis, Solutions, Perspectives: Proceedings. Ufa: Ufa State Aviation Technical University. pp. 156-161. Vol
- Wikipedia: <https://hu.wikipedia.org/wiki/Legendre-polinomok>
- Wikipedia2: https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials

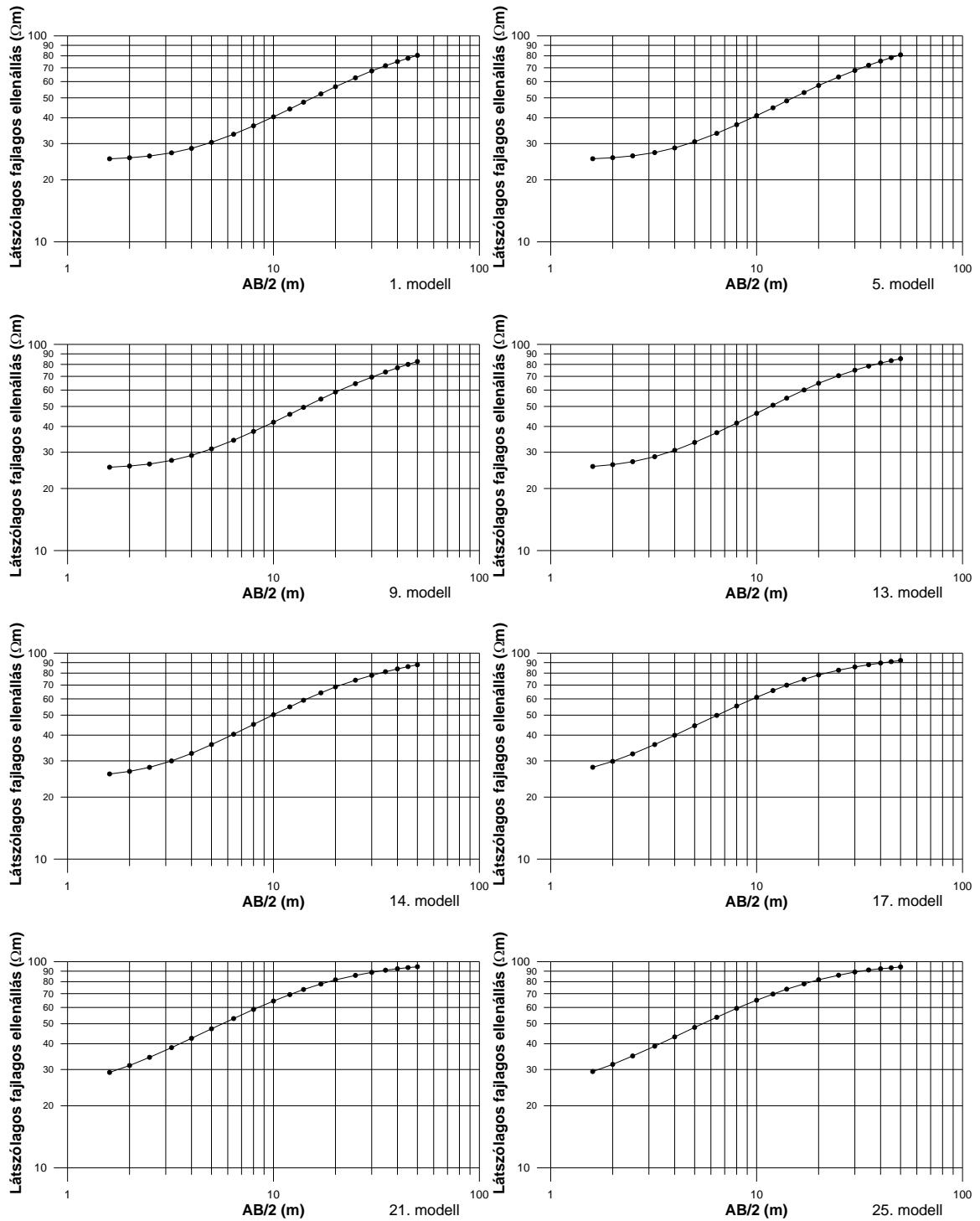
Függelék

A modell



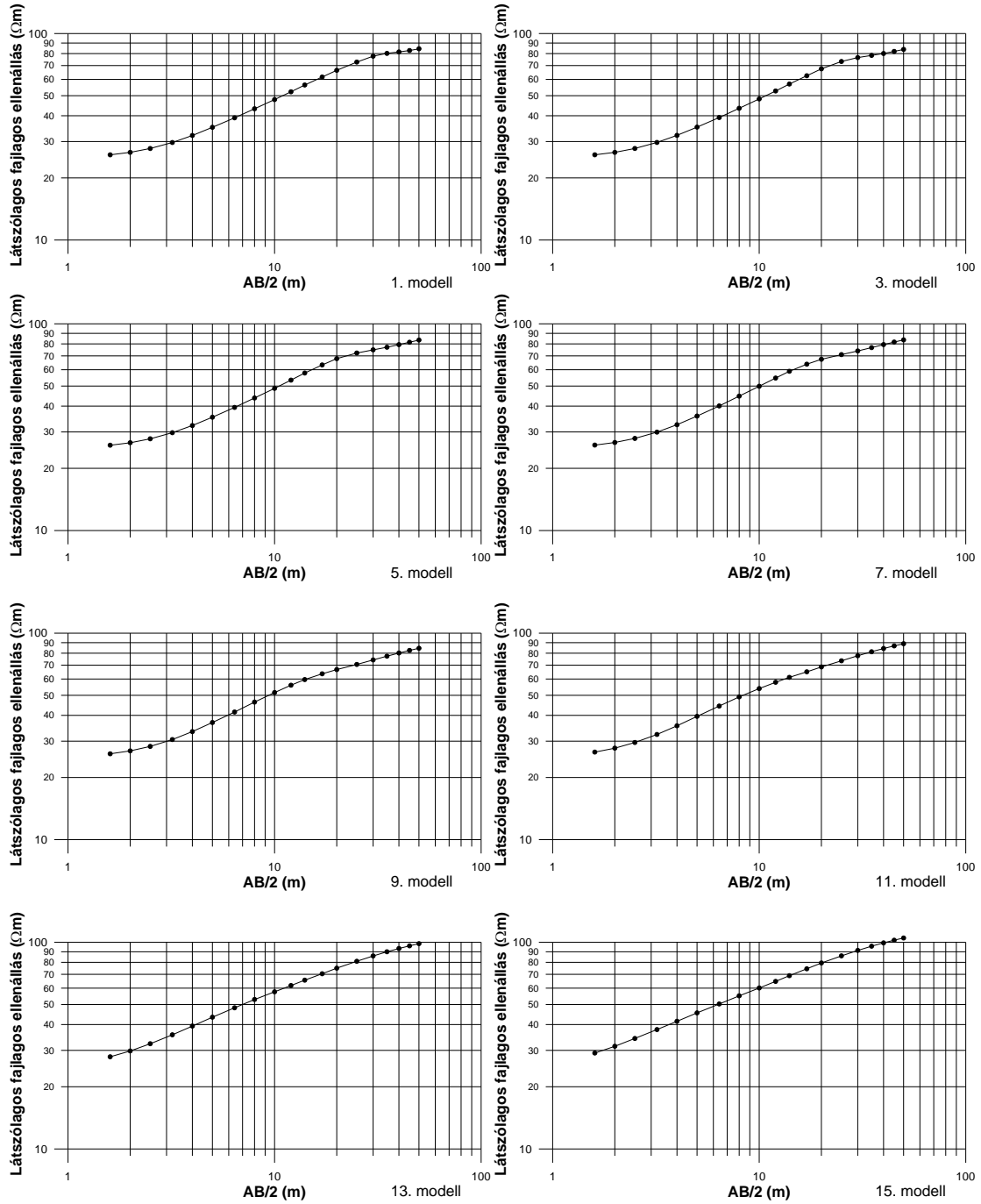
F1. ábra: Az A modell főbb VESZ görbéi

B modell



F2. ábra: A B modell főbb VESZ görbéi

C modell



F3. ábra: A C modell főbb VESZ görbéi