

**MIKOVINY SÁMUEL FÖLDTUDOMÁNYI DOKTORI ISKOLA**

A Doktori Iskola vezetője:  
Dr. DOBRÓKA MIHÁLY  
egyetemi tanár

**INVERZIÓS MÓDSZERFEJLESZTÉS A FOURIER  
TRANSZFORMÁLT ZAJÉRZÉKENYSÉGÉNEK  
CSÖKKENTÉSÉRE**

DOKTORI (PHD) ÉRTEKEZÉS

Írta:  
**SZEGEDI HAJNALKA**

Tudományos vezető:  
**DR. DOBRÓKA MIHÁLY**  
egyetemi tanár,  
a műszaki tudomány doktora

Miskolci Egyetem  
Geofizikai Tanszék  
Miskolc  
2015.

# TÉMAVEZETŐI AJÁNLÁS

**Szegedi Hajnalka**

## **„Inverziós módszerfejlesztés a Fourier transzformált zajérzékenységének csökkentésére”**

**című doktori (PhD) értekezéshez**

A doktori értekezés a Fourier transzformációt, mint inverz feladatot felfogva olyan új eljárásokat mutat be, amelyek a hagyományos Diszkrét Fourier transzformációhoz (DFT) képest figyelemre méltó (egyes esetekben egy nagyságrendet is elérő) zajelnyomó képességgel bírnak. Az új eljárásokban a spektrum diszkretizálása sorfejtéssel történik és az inverz feladat a sorfejtési együtthatókra nyer megfogalmazást. Bázisfüggvényeket a Jelölt a Fourier transzformáció sajátfüggvényei közül választ, mivel ekkor az inverz probléma Jacobi-mátrixa egyszerűen előállítható. Ez az egyszerűség teszi lehetővé a két dimenzióra történő általánosítást is. A kiugróan zajos adatok inverziós Fourier transzformációjára a Jelölt a Steiner súlyokkal definiált súlyozott legkisebb négyzetek módszerét alkalmazza. A kidolgozott módszerek alkalmazásaként 1D esetben a Hilbert transzformált inverziós előállítását, 2D esetben pedig a felszíni mágneses adatok pólusra redukálását mutatja be.

Az értekezés jól felépített, megfogalmazása világos, magába foglalja a jelölt elmúlt 4 év alatt elért legfontosabb kutatási eredményeit. A témavezető megítélése szerint a munka figyelemre méltó új tudományos eredményeket tartalmaz, amit az is igazol, hogy az értekezés legfontosabb eredményeit a *Mathematical Geoscience* c. nemzetközi folyóirat is közölte. A Jelölt doktori tevékenységének ideje alatt 8 lektorált folyóiratcikket publikált (melyek közül 3 impact factoros), egy monográfiában társszerzőként közreműködött és eredményeit 4 rangos nemzetközi konferencián is bemutatta.

Tudományos munkában való folyamatos részvétele, szorgalma, és az értekezésben bemutatott eredmények igazolják a Jelölt magas színvonalú tudományos ismereteit és az önálló kutatómunkára való alkalmasságát. Kijelenthető, hogy a Jelölt kiemelkedő képességekkel rendelkező ifjú kutató, aki az elméleti felkészültség, a tudományos kutatásra való alkalmasság, valamint a gyakorlatias szemlélet igen előnyös összhangját képes megvalósítani. A doktori értekezésben foglalt új tudományos eredmények a témavezető

meggyőződése szerint jelentősen hozzájárulnak a geofizikai adatfeldolgozás és értelmezés fejlődéséhez, de jelentős alkalmazási területre találhatnak a képfeldolgozás és a távérzékelés terén is.

Kijelentem, hogy az értekezés hiteles adatokat tartalmaz, az abban foglalt eredmények a Jelölt saját eredményei, valamint a dolgozat minden vonatkozásban megfelel a Mikoviny Sámuel Földtudományi Doktori Iskola által megkövetelt tartalmi és formai követelményeknek.

Fentiek alapján a PhD cím odaítélését támogatom és javaslom.

Miskolc, 2015. március 30.

Dr. Dobróka Mihály  
egyetemi tanár  
a műszaki tudomány doktora

## Tartalomjegyzék

<b>ABSTRACT .....</b>	<b>I</b>
<b>1. BEVEZETÉS.....</b>	<b>- 1 -</b>
<b>2. A FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ.....</b>	<b>- 4 -</b>
2.1. DISZKRÉT ADATRENDSZEREK FOURIER TRANSZFORMÁCIÓJA .....	- 4 -
2.2. A DISZKRÉT FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ ZAJÉRZÉKENYSÉGE .....	- 5 -
2.2.1. <i>A zajérzékenység jellemzése .....</i>	<i>- 5 -</i>
2.2.2. <i>Numerikus vizsgálatok.....</i>	<i>- 6 -</i>
2.3. A PROBLÉMA MEGOLDÁSA INVERZIÓ ALKALMAZÁSÁVAL.....	- 9 -
<b>3. A GEOFIZIKAI INVERZIÓ MÓDSZEREINEK ÁTTEKINTÉSE A ZAJÉRZÉKENYSÉG ÉS ZAJELNYOMÁS SZEMPONTJÁBÓL .....</b>	<b>- 11 -</b>
3.1. A LEGKISEBB NÉGYZETEK (LSQ) MÓDSZERE .....	- 11 -
3.2. AZ ITERATÍV ÚJRASÚLYOZÁS (IRLS) MÓDSZERE .....	- 14 -
3.2.1. <i>A legkisebb abszolút eltérés (LAD) módszere.....</i>	<i>- 15 -</i>
3.2.2. <i>Cauchy-súlyokkal definiált súlyozott IRLS módszer .....</i>	<i>- 15 -</i>
3.2.3. <i>Steiner-súlyokkal definiált IRLS módszer .....</i>	<i>- 16 -</i>
<b>4. A FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ, MINT SORFEJTÉSSEL DISZKRETIZÁLT INVERZ FELADAT .....</b>	<b>- 17 -</b>
4.1. ELŐZMÉNYEK .....	- 17 -
4.2. AZ INVERZIÓS ALAPÚ FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ ÚJ ALGORITMUSA.....	- 17 -
4.2.1. <i>A bázisfüggvények egy lehetséges megválasztása.....</i>	<i>- 18 -</i>
4.2.2. <i>Az Hermite függvények, mint bázisfüggvények .....</i>	<i>- 20 -</i>
4.2.3. <i>A skálázott Hermite függvények.....</i>	<i>- 21 -</i>
4.2.4. <i>LSQ algoritmus skálázott Hermite függvényekre alapozva (LSQ-FT) .....</i>	<i>- 23 -</i>
4.3. NUMERIKUS VIZSGÁLATOK .....	- 24 -
4.4. AZ EREDMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA.....	- 28 -
<b>5. FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ, MINT ROBUSZTUS INVERZ FELADAT .....</b>	<b>- 30 -</b>
5.1. STEINER-SÚLYOK ALKALMAZÁSA (S-IRLS-FT) .....	- 30 -
5.2. NUMERIKUS VIZSGÁLATOK .....	- 33 -
5.3. AZ EREDMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA.....	- 35 -
<b>6. INVERZIÓS ALAPÚ KÉTDIMENZIÓS FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ .....</b>	<b>- 37 -</b>
6.1. A 2D-LSQ-FT ALGORITMUS.....	- 39 -
6.2. ALGORITMUS A STEINER-SÚLYOKKAL DEFINIÁLT IRLS MÓDSZER ALKALMAZÁSA ESETÉN.....	- 40 -

(2D-S-IRLS-FT).....	- 40 -
6.3. AZ EREDMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA.....	- 42 -
<b>7. ALKALMAZÁSOK.....</b>	<b>- 43 -</b>
7.1. EGYDIMENZIÓS ALKALMAZÁS .....	- 43 -
7.1.1. <i>Hilbert transzformált előállítás inverziós alapú robusztus Fourier transzformációval.....</i>	- 43 -
7.1.2. <i>Az eredmények összefoglalása.....</i>	- 52 -
7.2. KÉTDIMENZIÓS ALKALMAZÁS.....	- 54 -
7.2.1. <i>2D-S-IRLS-FT alkalmazása mágneses adatok pólusra redukálása esetén.....</i>	- 54 -
7.2.2. <i>Az eredmények összefoglalása.....</i>	- 59 -
<b>8. ÖSSZEFOGLALÁS.....</b>	<b>- 60 -</b>
<b>KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS.....</b>	<b>- 62 -</b>
<b>IRODALOMJEGYZÉK .....</b>	<b>- 63 -</b>

**Abstract**

The Fourier transform is one of the most important data processing operation on the field of technical and nature sciences, while it is the starting point for numerous other applications. In the engineering practice for determining the frequency domain in case of discrete time domain data lines the Fourier transform and fast Fourier transform (FFT) is the tool. These algorithms approximate the spectrum of the time signal sufficiently, if the sampling and the registration time range are set properly. The Fourier transform is very noise sensitive therefore it is often problematic to process the measurement data. In order to decrease the influence of the random variations corrupting the measurements, different noise filtering techniques are used before and/or after computing the frequency spectrum. In the field of geophysics inversion several methods exist to suppress the noise very well.

For the developments of noise-resistant algorithms, least squares (LSQ), least absolute deviations (LAD) procedures (and other robust techniques) are extensively used. In many technical problems the measured data contain information about the model parameters of the structure under investigation. In the field of inverse problem theory various methods are developed to extract information contained by noisy datasets. This is especially true for the cases called over-determined problems. Consequently, if we formulate the Fourier transformation as an over-determined inverse problem, it can be expected that the influence of noise can be efficiently reduced. This idea was applied and developed in details by Vass in his PhD thesis (Vass 2010). An essential step in his approach is the use of a special discretization of the real and imaginary part of the spectrum making it possible to handle Fourier transform as an over-determined inverse problem. In calculating the elements of the Jacobi-matrix an analytical formula was used requiring a relatively sophisticated program development activity. Because of this complexity, the extension of the method for two- or even multidimensional Fourier transformation seems to be very difficult.

In my dissertation following the inversion strategy developed at the Department of Geophysics, University of Miskolc as discretization tool used series expansion. As basis function the scaled Hermite functions were used, which gave us the advantage that the elements of the Jacobi-matrix can be calculated by means a simple explicit formula.

I further developed the one-dimensional Fourier transform algorithm published by Vass giving a mathematically consistent way for the calculation of the Jacobi-matrix of the forward problem and inserting the Steiner-weights (in the framework Most Frequent Value) into the Iteratively Reweighted Least Squares based inversional Fourier transform method

(S-IRLS-FT). In this new algorithm the Steiner-weights are computed from the measured dataset in an inner iteration method.

Furthermore, generalizing the 1D algorithm I introduced the inversion based two-dimensional Fourier transform algorithm in its LSQ (2D-LSQ-FT) and IRLS (using Steiner's weights) versions (2D-S-IRLS-FT). The resistance against outliers and the noise suppression capabilities of the S-IRLS-FT made it justifiable to try the method on other data processing and earth science fields. That is why it was tested in seismic data processing where double inversion was used. Firstly, the Fourier spectrum of the time signal was defined by inversion based method, secondly (after the modifications necessary for the Hilbert transform) we returned to the time domain by robust inversion. I discussed the theoretic background of the developed Hilbert transform method and the results of the studies. I performed numerical tests on Gaussian and Cauchy noisy datasets, the results showed clearly that the algorithm provides an order of magnitude better noise suppression capability compared to the conventional method (based on the traditional DFT), (Szegedi and Dobróka 2014). In the field of the reduction to pole of surface measured magnetic data I studied the efficiency of the two-dimensional algorithm (2D-S-IRLS-FT), and here I also verified sufficient improvements compared to the traditional methods (using 2D-DFT).

## 1. Bevezetés

A Fourier transzformáció a műszaki- és természettudományok területén az egyik legfontosabb adatfeldolgozási művelet, amely ugyanakkor számos más eljárás kiinduló pontja is. A mérnöki gyakorlatban a frekvenciaspektrum meghatározására diszkrét időtartománybeli adatsorok esetén alkalmazott eszköz a diszkrét Fourier transzformáció (DFT), illetve annak speciális számítógépi változata, a gyors Fourier transzformáció (FFT). Ezek az algoritmusok az időjel spektrumát elegendően nagy pontossággal közelítik abban az esetben, ha a mintavételi közt és a regisztrálási időtartományt megfelelően választjuk meg, illetve a bemenő időadatokat nem terheli zaj. Mérési adataink viszont mindig zajjal terheltek, ezért különösen fontos az alkalmazott műveletek zajelnyomó képességének növelése. Mivel a Fourier transzformáció - hagyományos formájában - erősen zajérzékeny, ezért gyakran jelent problémát a mérési adatok feldolgozása terén.

A geofizikai mérési adatokban foglalt földtani információ „kiolvasása”, a földtani szerkezetek petrofizikai- és geometriai paramétereinek meghatározása a geofizikai inverzió alapvető feladata. A geofizikai inverzió gyakorlatában több olyan módszer létezik, amely a zajelnyomásra különösen alkalmas. A Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszékének kutatói az inverziós módszerek fejlesztése során számos eljárást dolgoztak ki, amelyekkel a zajelnyomás terén is nemzetközileg elismert eredményeket értek el. Ezek közül igen fontosak a kiugró hibával terhelt adatrendszerek inverziójára kidolgozott (robusztus) inverziós módszerek. A Tanszéken folytatott inverziós kutatásokban meghatározó szerepet kap az a kutatási irány, amelynek lényege, hogy a bonyolult (laterálisan és vertikálisan inhomogén) földtani szerkezeteken mért adatok feldolgozását, értelmezését sorfejtéses diszkretizációval a sorfejtési együtthatókra megfogalmazott inverziós eljárásban végezzük el. Az eljárás legnagyobb előnye, hogy viszonylag kevés sorfejtési együttható bevezetése mellett is megfelelő felbontás érhető el úgy, hogy a megoldandó probléma (relatív kisméretű) túlhatározott inverz feladatra vezet. A kutatásokról a Tanszék munkatársai a Magyar Geofizika hasábjain ötrészes cikksorozatban számoltak be. Az első sorozat a Fourier transzformációt újszerű megközelítésben inverz feladatként tárgyalja úgy, hogy a frekvencia spektrumot sorfejtéssel közelítik, inverziós változónak a sorfejtési együtthatókat tekintik. A második cikkben a mélyfúrás geofizikai adatok feldolgozásánál a fizikai paramétereket - mint a mélység függvényeit - sorfejtéssel közelítve adják meg, a sorfejtési együtthatókat inverziós eljárás keretében állítják elő. A harmadik dolgozatban a sorfejtéses inverzió módszerével a gerjesztett potenciál (GP) adatok feldolgozására mutatnak be egy új módszert.

A negyedik dolgozat egy korábban kidolgozott kétdimenziós eljárás továbbfejlesztésével, a nehézségi erőter háromdimenziós potenciálfüggvényének inverziós előállítását Eötvös-inga mérési adatok, nehézségi gyorsulás mérések, függővonal-elhajlás értékek és digitális terepmodell adatok együttes felhasználásával mutatja be. Végül az ötödik cikkben egy hatékony eljárást kínálnak a kétdimenziós földtani szerkezeteken mért geoelektromos adatok inverziójára.

A fenti irányelvet követve, PhD doktori kutatásaim során a sorfejtéses inverziós eljárás adatfeldolgozásban való alkalmazásának lehetőségeit vizsgálva a geofizikai inverzió eszköztárát használó Fourier transzformációs eljárást továbbfejlesztettem, amely a hagyományos transzformációs módszerekhez képest jelentős zajelnyomó képességgel rendelkezik. A fejlesztés célkitűzése a módszer robusztusságának növelésére is irányult, azaz kiugró hibával terhelt adatrendszer Fourier transzformációjára is alkalmas variánsok kidolgozását kellett elérnem, amely eredményeket korábbi dolgozatban témavezetőmmel már bemutattunk (Dobróka et al. 2012). Értekezésemben a Fourier spektrum diszkrétizálására sorfejtést alkalmazok, azaz a folytonos komplex függvényt alkalmasan megválasztott függvényrendszer szerint fejtem ki. Mivel a sorfejtéses geofizikai inverzióban teljes, ortogonális, normált függvény rendszereket alkalmazunk, bázisfüggvénynek az Hermite függvényeket választottam. Vass (2010) bemutatta, hogy a geofizikai mérésekben szereplő frekvenciák széles tartományt ölelnek fel, emiatt az Hermite függvényeket skáláznunk kell. Az eljárás továbbfejlesztésével (Dobróka et al. 2012) - a skálázott Hermite függvények egy speciális tulajdonságát felhasználva, miszerint azok a Fourier transzformációnak a sajátfüggvényei - a Jacobi-mátrix elemeinek számítására egy gyors és egyszerű explicit formula adható, amelynek használatával az egydimenziós inverziós alapú Fourier transzformáció egyszerűbben (integrálás nélkül) számítható. Ez igen fontos az inverziós Fourier transzformációs eljárások kidolgozása során, mivel nagymértékben lerövidíti a számítási feladatokat. Főleg a kétdimenziós Fourier transzformáció alkalmazása terén könnyíti meg a dolgunkat ez az egyszerű számítási forma.

Doktori kutatásaim kezdetén az inverziós alapú 1D Fourier transzformációs módszer zajérzékenységének csökkentésére ún. Cauchy-súlyokat alkalmaztam, melynek hátránya az, hogy skála paramétereit tapasztalati úton szükséges meghatározni. Számos gyakorlati példában viszont bizonyítást nyert, hogy a Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszékének egykori professzora, Dr. Steiner Ferenc által kidolgozott leggyakoribb érték módszer (MFV) segítségével a geofizikai inverziós eljárások igen hatásosan robusztifikálhatók, ezért a

meglévő egydimenziós algoritmusban alkalmazott Cauchy-súlyokat a Steiner Ferenc professzor által kidolgozott (Steiner 1997) leggyakoribb érték módszerével számított súlyokkal (a továbbiakban Steiner-súlyok) helyettesítettem. Így, az új Fourier transzformációs robusztus algoritmus (S-IRLS-FT) az iteratív újrásúlyozás módszerén alapul és a Steiner professzor által bevezetett Steiner-súlyokat alkalmazza.

Értekezésem 5. fejezetében részletesen tárgyalom a kidolgozott inverziós alapú Fourier transzformáció új algoritmusát, és annak robusztus (Steiner-súlyokkal definiált) változatát, ill. zajérzékenység és zajelnyomás szempontjából vizsgálom őket. Relatív adat- és modellterbeli távolságokat is megadok az inverziós eredmények minősítése végett. A továbbiakban bemutatom az inverziós alapú kétdimenziós Fourier transzformációs algoritmust LSQ (2D-LSQ-FT)-, ill. Steiner-súlyokkal definiált IRLS módszer (2D-S-IRLS-FT) alkalmazása esetén.

Az S-IRLS-FT eljárás outlierekkel szembeni rezisztenciája és kiemelkedő zajelnyomó képessége indokoltá teszi, hogy a módszert más adatfeldolgozási és műszaki földtudományi területeken is kipróbáljuk. Ezért az új algoritmust a szeizmikus adatfeldolgozás területén is vizsgáltam. Ekkor inverzióval meghatározzuk az időjel (csatorna) Fourier spektrumát, majd a Hilbert transzformációhoz szükséges átalakítással kapott spektrumot robusztus inverzióval transzformáljuk vissza az időtartományba. A 7.1. fejezetben tárgyalom a kidolgozott Hilbert transzformációs eljárás elméleti háttérét, ill. az algoritmussal végzett inverziós vizsgálatok eredményeit. Gauss, ill. Cauchy-eloszlást követő zajjal terhelt Ricker-waveleten való tesztelést végeztem, melyek eredményeiből kitűnik, hogy az eljárás a kiugró zajokkal szemben figyelemre méltó rezisztenciát és a hagyományos (DFT-vel számított) szelvényhez képest egy nagyságrenddel jobb zajelnyomó képességet mutat (Szegedi és Dobróka 2014). A mágneses adatok pólusra redukálása terén a kidolgozott kétdimenziós algoritmus használhatóságát vizsgáltam és a vizsgálatok eredményeként itt is igazoltam az inverziós Fourier transzformáció zajérzékenységének jelentős javulását. A kidolgozott matematikai eljárásokat Matlab programnyelvben (Matrix Laboratory) implementáltam.

## 2. A Fourier transzformáció

A mérési hibákkal terhelt adatrendszerekben foglalt információ kinyerése a geofizikai adatfeldolgozás segítségével válik lehetővé, melynek területén a Fourier transzformáció kulcsfontosságú szerepet tölt be. Jelentősége abban áll, hogy az időtartományban mért jel viselkedését két különböző tartományban tanulmányozhatjuk.

A Fourier transzformáció a jel regisztrálásának időtartományát és a jel vizsgálatának frekvenciatartományát kapcsolja össze az alábbi formula alapján

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.1.)$$

ahol  $t$  változó jelöli az időt,  $\omega$  a körfrekvenciát és  $j$  a képzetes egységet. A (2.1.) egyenletben szereplő  $U(\omega)$  az  $u(t)$  időfüggvény Fourier spektruma, amely általában egy komplex értékű folytonos függvény.

Az inverz Fourier transzformáció segítségével biztosítható a frekvenciatartományból az időtartományba történő visszatérés

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.2.)$$

A továbbiakban jelen fejezetben áttekintem a folytonos Fourier transzformációból levezethető, diszkrét adatrendszerekre is kiterjeszhető Fourier transzformációt, illetve egy numerikus példán keresztül szemléltetem annak zajérzékenységre való hajlamát, végül röviden összefoglalom a zajérzékenységet jellemző mennyiségeket.

### 2.1. Diszkrét adatrendszerek Fourier transzformációja

A digitális számítógépek elterjedése a Fourier transzformáción alapuló eljárások csodálatos virágzását eredményezte. A diszkrét Fourier transzformáció (DFT) a folytonos Fourier transzformáció speciális esete, amely a számítógépes adatfeldolgozásban gyakran nyer alkalmazást. Ha egy folyamatos, sávlimitált jelből  $N$  számú mintát veszünk, akkor az  $e$  minták alapján végrehajtott Fourier transzformáció az általános képletnek időben diszkrét értékekre való átalakításával írható fel. A (2.1.1.) képlet arra utal, hogy a transzformáció a jelet  $N$  mintánként periodikusnak tekinti. Erre a felhasználások bizonyos fajtáinál érdemes ügyelni. A DFT, ha alkalmasan választott mintavételezési rátával és mintaszámmal dolgozunk, a legtöbb jelre a folytonos Fourier transzformáció viselkedésének jó megközelítéseit adja. A Fourier transzformáció diszkrét idejű formája

$$U(f) = U(n\Delta f) = \Delta t \sum_{k=N_{\min}}^{N_{\max}} u(k\Delta t) e^{-j \frac{2\pi n k}{N}}, \quad \Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \quad (2.1.1.)$$

$$k = (N_{\min}, N_{\min+1}, \dots, N_{\max-1}, N_{\max}),$$

ahol  $u(t)$  a folytonos időfüggvény,  $\Delta t$  a mintavételi köz,  $N$  a minta elemszáma,  $U(f)$  a frekvencia spektrum,  $k$  pedig konstans értéket képvisel.

A folytonos Fourier transzformációhoz hasonlóan a DFT-nek is létezik az inverz párja, amely segítségével a diszkrét frekvenciaspektrumból számítható ki a neki megfelelő diszkrét időfüggvény, mindössze annyiban különbözik az előzőektől, hogy az exponensben az előjel pozitív. Az inverz Fourier transzformáció diszkrét idejű formában

$$u(t) = u(k\Delta t) = \Delta f \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} U(n\Delta f) e^{j \frac{2\pi n k}{N}}, \quad \Delta t = \frac{1}{N\Delta f} \quad (2.1.2.)$$

$$n = (N_{\min}, N_{\min+1}, \dots, N_{\max-1}, N_{\max}).$$

Az itt bemutatott formulák dimenzióhelyesek, és arra az esetre vonatkoznak, amikor a mintavételi értékek a mintavételi időközök közepére vonatkoznak.

## 2.2. A diszkrét Fourier transzformáció zajérzékenysége

Mivel mérési adataink mindig zajjal terhelték a feldolgozás, illetve értelmezés módszereit abból a szempontból is vizsgálnunk kell, hogy azok milyen mértékben zajérzékenyek. A Fourier transzformáció egy lineáris leképezés, diszkrét variánsaiban (DFT, FFT) pedig a frekvencia spektrumot inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásaként állíthatjuk elő. Az előzőek szerint érthető tehát, hogy az időtartományban jelentkező zajt a lineáris transzformációval leképezzük a frekvencia tartományba is, emiatt a Fourier transzformáció diszkrét variánsai igencsak zajérzékeny eljárásnak tekinthetők.

### 2.2.1. A zajérzékenység jellemzése

Az adatokat terhelő hibák következtében a mért mennyiség pontos értékét nem ismerjük, ezért azt gyakran valamely mintajellemző értékkel (pl. számtani átlag, medián, leggyakoribb érték) jellemezzük. Ezen mennyiségek jelentősen eltérhetnek egymástól, amelyből az következik, hogy a belőlük származtatott hibajellemzők értéke is különbözik. Még nehezebb a helyzet, ha méréseinkből az adatainkban rejlő belső információkra (pl. a földtani szerkezet jellemzőire) vagyunk kíváncsiak. Ekkor rendszerint valamilyen modellt feltételezünk, amelynek alapján (a szerkezet feltételezett paramétereivel) adatokat számítunk, és azokat

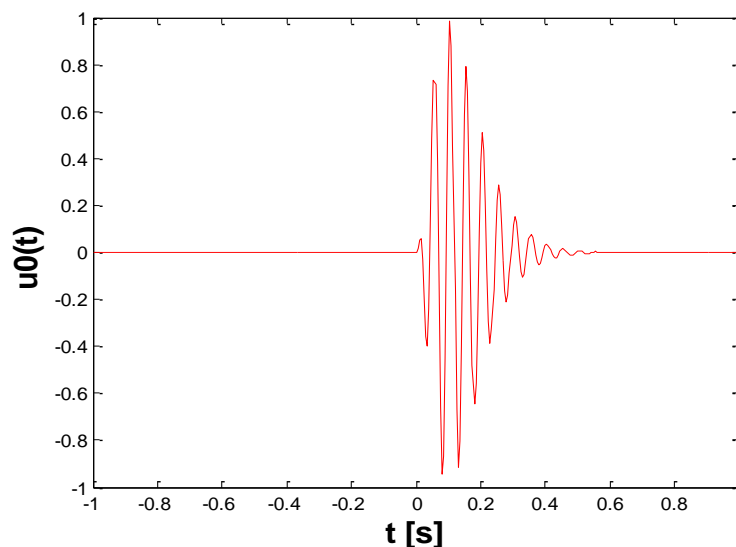
összevetjük a mért adatokkal. A két adatrendszer ún. euklideszi távolsága (adattávolság) gyakran alkalmazott eszköz a zajviszonyok jellemzésére (amiben persze a feltételezett modell pontatlansága is megjelenik). A geofizikai gyakorlatban - valamely módszer zajjal szemben mutatott viselkedésének vizsgálatára - elfogadott eljárás a szintetikus adatokon történő tesztelés. Ekkor a mérési adatainkat szimuláló adatrendszerhez egy ismert modellen számított (ismert eloszlást követő zajjal terhelt) adatokat generálunk és azt a vizsgált eljárással feldolgozva elemezzük (pl. az adattérben vagy a paraméterterben számított távolságokkal). Ezt a módszert a DFT zajérzékenységének jellemzésére is használhatjuk, amit a következő numerikus példa is alátámaszt.

### 2.2.2. Numerikus vizsgálatok

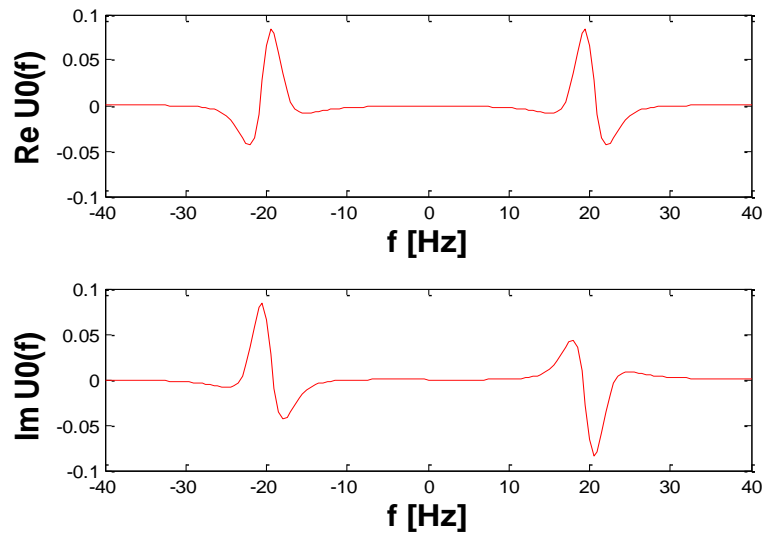
A diszkrét Fourier transzformáció (DFT) zajérzékenységének demonstrálására egy numerikus példát mutatok be. A választott időfüggvény általános alakját a (2.2.2.1.) egyenlet szerint vettem fel a  $[-1, 1]$  intervallumban

$$u(t) = \begin{cases} \kappa t^\eta e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi), & t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}. \quad (2.2.2.1.)$$

Az  $u(t)$ -ben szereplő görög betűk jelölik az időjel paramétereit, melyek értékeit a Matlab programrendszerben a következők szerint rögzítettem:  $\kappa \approx 738.91$ ,  $\eta=2$ ,  $\lambda=20$ ,  $\omega=40\pi$ ,  $\varphi=\pi/4$ . A (2.2.2.1.) szerint felvett zajmentes időtartománybeli jel képét az 1. ábrán látjuk, míg a mérési hibáktól mentes időjel DFT-vel számított frekvenciaspektrumát a 2. ábrán mutatom be, amely nagyon jól egyezik az analitikusan kapható eredménnyel.

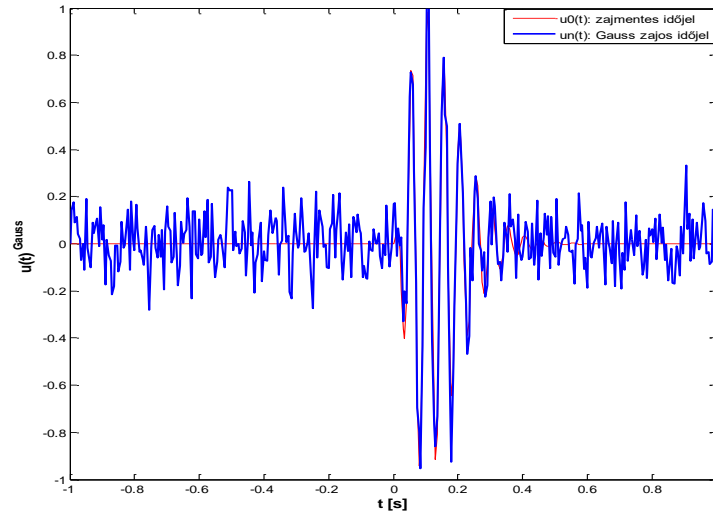


1. ábra: A zajmentes jel az időtartományban

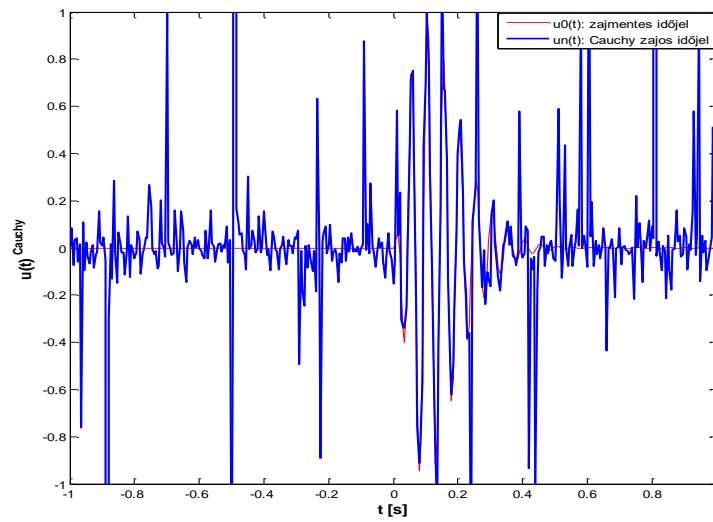


2. ábra: A zajmentes jel DFT frekvenciaspektrumának valós és képzetes része

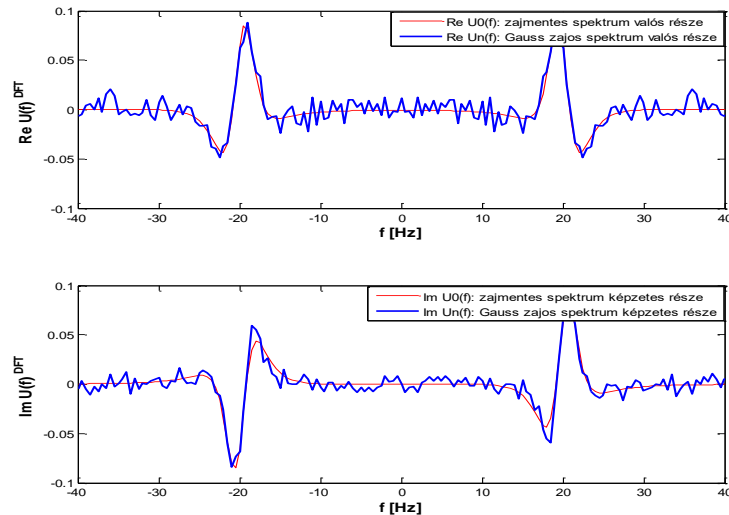
A mérési gyakorlatban rendszerint véletlen természetű zaj rakódik a jelre. A zaj statisztikájáról általában keveset tudunk, ezért példánkban kétféle zajos adatrendszert generáltam: az I. adatrendszer (3. ábra) a Gauss-eloszlást, a II. adatrendszer (4. ábra) pedig a kiugróan zajos adatrendszer modellezésére általánosan használt ún. Cauchy-eloszlást követő zajt tartalmaz. A két adatrendszer DFT alkalmazása után az 5., illetve a 6. ábrán látható spektrumot adja. Jól látható, hogy az I. adatrendszer Fourier spektruma elfogadhatóan követi a zajmentes spektrumot, míg a II. jel esetében a spektrum alig felismerhető. Ez igazolja, hogy a Fourier transzformáció hagyományos diszkrét implementációi zajérzékenyek különösen nem Gauss-eloszlású zajstatisztikák esetén. Ezért is szükséges és fontos olyan robusztus (a zaj eloszlásától kevésbé függő) Fourier transzformációs eljárás kifejlesztése, amellyel a transzformáció zajérzékenységének csökkentése révén, a feldolgozási és értelmezési módszerek pontossága és megbízhatósága növelhető (Szegedi és Dobróka 2012).



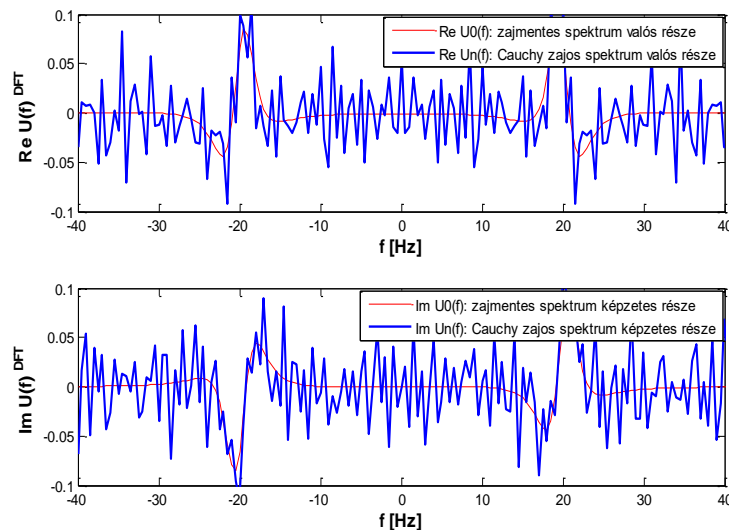
3. ábra: I. adatrendszerbeli zajos időjel



4. ábra: II. adatrendszerbeli zajos időjel



5. ábra: Gauss zajjal terhelt adatrendszer DFT-vel számított frekvenciaspektruma



6. ábra: Cauchy zajjal terhelt adatrendszer DFT-vel számított frekvenciaspektruma

### 2.3. A probléma megoldása inverzió alkalmazásával

Az előzőekben bemutatott zajérzékenység indokolja a DFT-t kiváltó, a zajokkal szemben fokozottan rezisztens eljárások fejlesztését. Manapság a digitális jelfeldolgozásban a zaj mértékének csökkentésére különböző szűrési technikák széleskörű alkalmazása válik elérhetővé. A geofizikai inverzió gyakorlatában a mérési adatok száma általában szükség szerint növelhető, mellyel a zajelnyomás lehetővé válik. A túlhatározott inverz feladatot megoldó eljárások kész eszköztárat kínálnak a mérési hibákkal terhelt

adatrendszerekben foglalt információ kiolvasására. Adódik a gondolat, hogy a Fourier transzformációt, mint túlhatározott inverz feladatot fogalmazzuk meg. Ezt az utat követve PhD értekezésében Vass Péter inverziós alapú Fourier transzformációs eljárást mutatott be, melynek zajelnyomó képességét meggyőzően bizonyította (Vass 2010).

Értekezésem 4. és 5. fejezetében én is ezt a gondolatot követem azzal a különbséggel, hogy a sorfejtéses inverziónál bázisfüggvényként választott Hermite függvények egy speciális tulajdonságát használom fel, miáltal a linearizált inverzió Jacobi-mátrixát, mint komplex integrált nem kell kiszámítani, ehelyett elegendő a sajátértékkel való szorzás, ami a számítási idő jelentős csökkentését teszi lehetővé. Az inverziós Fourier transzformációs eljárás robusztifikálása érdekében az iteratív újrasúlyozás módszerében Steiner-súlyokat alkalmazok, amely által a zajjal szembeni rezisztencia tovább növelhető.

### 3. A geofizikai inverzió módszereinek áttekintése a zajérzékenység és zajelnyomás szempontjából

A geofizikai inverz modellezést általában megelőzi egy földtani modell megalkotása, mely során a probléma szempontjából lényeges tulajdonságokat kiemeljük, a lényegteleneket pedig elhagyjuk. Matematikai szempontból nézve a geofizikai inverzió olyan optimalizációs eljárás, amely a mért és számított adatok illesztésével állítja elő a modell paramétereit. Az inverzió folyamán azzal a feltételezéssel élünk, hogy a mért adatok és a földtani modellen számított adatok között kapcsolat áll fenn, és valamilyen algoritmus segítségével úgy változtatjuk meg a modellt jellemző paramétereket, hogy a mért és számított adatok egyezésének javulását érzük el. Ezt az eljárást egy előre meghatározott feltétel (stopkritérium) teljesüléséig folytatjuk. Az inverzió gyakorlatában ismeretes, hogy sem a modell, sem a mérési adatrendszer nem mentes a hibáktól. A modelltől származó hiba nagysága a modell finomításával érhető el. A méréseinket terhelő véletlen hibák hatását a mérési adatok számának növelésével és megfelelő inverziós eljárás alkalmazásával redukálhatjuk. A túlhatározott lineáris inverz feladatok megoldására számos jól bevált technika ismert. Ezek közül ebben a fejezetben részletesebben csak a későbbi tárgyalás szempontjából fontos módszereket tekintem át.

#### 3.1. A legkisebb négyzetek (LSQ) módszere

Ahhoz, hogy a választott földtani modell paramétereit meghatározhassuk terepi mérési adatokat gyűjtünk, amelyek információt hordoznak a modellparamétereikről. E kapcsolatot biztosító összefüggés általános megnevezése a

$$\vec{d} = \vec{g}(\vec{m}) \quad (3.1.1.)$$

direkt feladat, amely rendszerint nemlineáris kapcsolatot tükröz. A geofizikai inverzióban gyakori a direkt probléma linearizálása a paramétertér valamely  $\vec{m}_o$  pontja körül, azaz közelítsük a  $\vec{g}(\vec{m})$  függvényt az

$$\vec{m} = \vec{m}_o + \delta\vec{m}$$

pontban Taylor sora első két tagjával

$$d_{e_k} = g_k(\vec{m}_o) + \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial g_k}{\partial m_j} \right)_{\vec{m}_o} \delta m_j, \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Bevezetve a

$$G_{kj} = \left( \frac{\partial g_k}{\partial m_j} \right)_{\vec{m}_o}$$

és a  $d_k^{(o)} = g_k(\vec{m}_o)$  jelölést a (3.1.1.) egyenlet így is írható

$$d_{e_k} = d_k^{(o)} + \sum_{j=1}^M G_{kj} \delta m_j,$$

vagy vektor alakban

$$\vec{d}_e = \vec{d}^{(o)} + \underline{\underline{G}} \delta \vec{m}.$$

Az itt bevezetett  $\underline{\underline{G}}$  mátrix neve Jacobi-mátrix. A  $\delta \vec{d} = \vec{d}_e - \vec{d}^{(o)}$  jelölést alkalmazva láthatjuk, hogy  $\delta \vec{d} = \underline{\underline{G}} \delta \vec{m}$ , azaz lineáris egyenletre jutottunk. Ha a direkt feladat lineáris, (mint pl. a később tárgyalandó inverz Fourier transzformáció esetében) a számított adatok és a paraméterek közötti kapcsolat

$$\vec{d} = \underline{\underline{G}} \vec{m}$$

alakú. Az egységes nevezéktan miatt a továbbiakban a  $\underline{\underline{G}}$  együttható mátrixot ekkor is Jacobi mátrixnak nevezzük.

A mért adatok vektora és a számított adatok vektora között, ill. a megalkotott földtani modell és a valódi objektum között minden esetben különbség áll fenn. Tekintve, hogy mérési adataink zajosak, az inverzióban szokásos a mért adatok  $\vec{d}_m$  vektora és a direkt feladat megoldásával előállított számított adatok  $\vec{d}_e$  vektora közötti eltérés (vagy hiba) vektor bevezetése

$$\vec{e} = \vec{d}_m - \vec{d}_e, \quad (3.1.2.)$$

vagy linearizálva

$$\vec{e} = \vec{d}_m - \vec{d}^{(o)} - \underline{\underline{G}} \delta \vec{m},$$

amely általában nem zérus vektor és elemei rendszerint nem is tehetők zérussá (pl. a mérési adatokban mindig jelenlévő zaj miatt). A két adatrendszer illeszkedésének jellemzésére bevezetjük az

$$E = E(\vec{d}_m - \vec{g}(\vec{m})) \quad (3.1.3.)$$

minimalizálandó függvényt, amely a mért és számított adatok illeszkedését jellemző skalárként használható.

A túlhatározott inverz probléma hibával terhelt mérési adatrendszerek esetén ellentmondó egyenletrendszerre vezet, melynek matematikai értelemben nincs megoldása. Ilyenkor általában olyan paramétervektort keresünk, amely minimalizálja a (3.1.2.) hibavektor valamely normáját. A leggyakrabban alkalmazott módszer a legkisebb négyzetek elve (Least Squares Method), mely szerint a mért és számított adatok eltérései négyzetösszegének

$$E_2 = \sum_{k=1}^N e_k^2 = \sum_{k=1}^N \left( d_k - \sum_{j=1}^M G_{kj} m_j \right) \left( d_k - \sum_{i=1}^M G_{ki} m_i \right) \quad (3.1.4.)$$

minimumához tartozó paraméter értékeket tekinthetjük elfogadhatónak. A minimum feltétel a (3.1.5.) normálegyenletre vezet

$$\sum_{i=1}^M m_i \sum_{k=1}^N G_{ki} G_{kl} = \sum_{k=1}^N G_{kl} d_k, \quad (3.1.5.)$$

melyet vektoriális alakban (3.1.6.) szerint is írhatunk (Menke 1984)

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \vec{m} = \underline{\underline{G}}^T \vec{d}. \quad (3.1.6.)$$

Ezen az úton tehát a nemlineáris inverz probléma linearizálás útján megoldható

$$\vec{m} = \left( \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \right)^{-1} \underline{\underline{G}}^T \vec{d}. \quad (3.1.7.)$$

A (3.1.6.) egyenlet a Gauss-féle legkisebb négyzetek módszerének normálegyenlete, ahol  $\underline{\underline{G}}$  jelöli a probléma Jacobi-mátrixát,  $T$  a transzponálás jele. A  $\underline{\underline{G}}$  mátrix megadásához elengedhetetlen a  $\partial d / \partial m$  differenciálhányadosok numerikus számítása, ebből adódóan a (3.1.6.)-ban szereplő  $\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}}$  (az egyenletrendszer mátrixa) erősen befolyásolja az egyenletrendszer megoldásával kapott eredmény megbízhatóságát. Ezt a „kockázatot” ún. kondíció számmal jellemezzük. A leggyakrabban alkalmazott kondíciószám a

$$K = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}, \quad (3.1.8.)$$

ahol a  $\lambda_{\max}$  és  $\lambda_{\min}$  a  $\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}}$  mátrix legnagyobb és legkisebb sajátértéke. Minél nagyobb a  $\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}}$  mátrix kondíciószáma, annál rosszabbul kondicionált lineáris egyenletrendszert kapunk, aminek egyik „tünete”, hogy a megoldás jelentősen eltérhet a mért adatok kismértékű megváltozása miatt. Az LSQ inverziós eljárás akkor vezet optimális eredményre, ha a mérési adatokat terhelő zaj eloszlása Gauss-eloszlású. A 4.3. alfejezetben egy példán keresztül fogom demonstrálni, mi történik abban az esetben, ha a mérési adatokban kiugróan zajos adatok (outlierek) is előfordulnak.

### 3.2. Az iteratív újrásúlyozás (IRLS) módszere

Az előző alfejezetben bemutatott LSQ eljárást általánosíthatjuk tetszőleges  $p$ -re definiált

$$E_p = \left[ \sum_{k=1}^N |e_k|^p \right]^{1/p} \quad (3.2.1.)$$

norma esetére is. A probléma a súlyozott legkisebb négyzetek módszerére vezethető vissza, ekkor a minimalizálandó funkcionál

$$E_p = \sum_{k=1}^N W_{kk} e_k^2 \quad (3.2.2.)$$

alakú. A gyakorlat szempontjából a  $p=1$  eset fontos, amit az iteratív újrásúlyozás módszerével oldhatunk meg, bevezetve a

$$W_{kk} = \left| d_k - \sum_{i=1}^M G_{ki} m_i \right|^{-1} \quad (3.2.3.)$$

súlyokat. Az eljárás keretében a súlymátrix elemeit az előző iterációból kapjuk és így a

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{m}} = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{d}} \quad (3.2.4.)$$

lineáris normál egyenletrendszer megoldva jutunk eredményre.

Az iteratív újrásúlyozás módszerét Scales et al. (1988) nemlineáris inverz feladat megoldásának iteratív úton való előállítására alkalmazta úgy, hogy az egyes iterációs lépésekben, az előző lépés eredménye alapján meghatározott eltérésvektor elemeivel számítja újra a  $W_{kk}$  súlyokat. Ezáltal minden iterációban lineáris inverz feladatot oldhatunk meg. Az iteráció első lépésében a (3.1.6.)-nak megfelelő lineáris normálegyenlet rendszerből indulunk ki, eredményként a közelítő

$$\underline{\underline{m}}^{(1)} = \left( \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \right)^{-1} \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{d}} \quad (3.2.5.)$$

vektort kapjuk, amellyel képezzük az

$$e^{(1)} = d - \underline{\underline{G}} \underline{\underline{m}}^{(1)} \quad (3.2.6.)$$

eltérés (hiba) vektort és ennek elemeivel képezzük a  $\underline{\underline{W}}^{(1)}$  súlymátrixot. Az iteráció második lépésében a (3.2.4.)-nek megfelelően a  $\underline{\underline{W}}$  súlymátrixot közelítő  $\underline{\underline{W}}^{(1)}$ -gyel felírt

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{W}}^{(1)} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{m}}^{(2)} = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{W}}^{(1)} \underline{\underline{d}} \quad (3.2.7.)$$

normál egyenletet kell megoldanunk. A (3.2.7.) egyenletet az iteráció  $j$ -ik lépésében

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{W}}^{(j-1)} \underline{\underline{G}} \vec{m}^{(j)} = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{W}}^{(j-1)} \vec{d} \quad (3.2.8.)$$

alakban írhatjuk, amely visszavezet a súlyozott legkisebb négyzetek módszeréhez. Ezt az iteratív eljárást addig folytatjuk, míg egy előre meghatározott stopkritérium nem teljesül. A (3.2.4.) nemlineáris egyenlet megoldását ezzel egyre pontosabban közelíthetjük.

### 3.2.1. A legkisebb abszolút eltérés (LAD) módszere

Abban az esetben, ha a mérési adatrendszerünk Gauss-eloszlástól eltérő statisztikát követ, a geofizikai alkalmazásokban az  $L_p$ -normát minimalizáló inverziós módszerek közül a  $p=1$ -nek megfelelő legkisebb abszolút eltérés (LAD) módszere sikeresen használható (Scales et al. 1988). Mivel  $p=1$  mellett a súlymátrix főátlóbeli elemeit a (3.2.1.1.) alapján határozzuk meg

$$W_{kk} = \frac{1}{|e_k|}, \quad (3.2.1.1.)$$

az adódik, hogy az adatok annál kisebb súllyal rendelkeznek, minél nagyobb volt az előző iterációban az eltérésük a számított értéktől, így a súlymátrixot minden iterációs eljárásban újra számítjuk (Iteratív újrasúlyozás: IRLS). Ettől a módszertől tehát azt várhatjuk, hogy az adatrendszerben jelentkező kiugróan nagy hibák hatását elnyomja.

### 3.2.2. Cauchy-súlyokkal definiált súlyozott IRLS módszer

Mivel a (3.2.1.1.) súlyok hibátlan adatoknál szingulárisak, numerikusan stabilizálhatjuk az algoritmust az  $\varepsilon^2$  paraméter bevezetésével  $W_{kk} = \frac{1}{\varepsilon^2 + |e_k|}$ , vagy a numerikusan még

kedvezőbb  $W_{kk} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + |e_k|}$  súlyok alkalmazásával. Ettől már csak egy lépés a

$$W_{kk} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + e_k^2}, \quad (3.2.2.1.)$$

ún. Cauchy-súlyok alkalmazása, amely különösen előnyös kiugróan zajos adatok inverziós feldolgozása során (Amundsen 1991).

Adódhat a gondolat, hogy az inverziós Fourier transzformáció robusztifikálására az iteratív újrasúlyozás Cauchy-súlyokkal megfogalmazott változatát alkalmazzuk. Ezt a feladatot Vass (2010) oldotta meg. Az eljárás keretében a  $\sigma^2$  skála paramétereket előzetesen ismerni

kell. Dobróka et al. (1991) megmutatta, hogy az inverz feladat megoldására a Steiner professzor által bevezetett Leggyakoribb érték módszer (Most Frequent Value - MFV) szerint számított súlyok különösen jól alkalmazhatók. A szakirodalomban korábban MFV-súlyoknak, témavezetőmmel publikált (Dobróka et al. 2014) dolgozatunkban Steiner-súlyoknak nevezett súlymátrix elemekben a  $\sigma^2$  skála paraméterek egy belső iterációban kapnak automatikusan értéket. Ezért doktori kutatásaim során a Steiner-súlyokkal definiált iteratív újrasúlyozás módszerét alkalmaztam.

### 3.2.3. Steiner-súlyokkal definiált IRLS módszer

A Cauchy-súlyoknak - bár hatékonyan csökkentik a kiugró adatok hatását - megvan az a hátrányuk, hogy a  $\sigma^2$  paramétereket önkényesen, tapasztalati úton kell meghatároznunk. E hátrány miatt kezdtem el dolgozni a Steiner-súlyokkal. A Steiner professzor által kidolgozott, ún. Leggyakoribb érték módszer (Steiner 1988) felhasználása különösen előnyös, mert a Cauchy-súlyokban szereplő  $\sigma^2$  skálaparamétereket - nevezzük a továbbiakban  $\varepsilon^2$  paramétereknek (Steiner-féle skálatényező: dihéziók) - a mérési adatrendszerünk statisztikájából származtatja le egy belső iterációs eljárásban (Steiner 1997). Az iteráció  $(j+1)$ -ik lépésében az  $\varepsilon_{(j+1)}^2$  az  $\varepsilon_j^2$  ismeretében meghatározható

$$\varepsilon_{(j+1)}^2 = 3 \frac{\sum_{k=1}^N \frac{e_k^2}{(\varepsilon_j^2 + e_k^2)^2}}{\sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{\varepsilon_j^2 + e_k^2} \right)^2}, \quad (3.2.3.1.)$$

ahol a 0-ik lépésben az  $\varepsilon_0$  kezdő érték adott (3.2.3.2.) szerint

$$\varepsilon_0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (e_{\max} - e_{\min}) \quad (3.2.3.2.)$$

(Steiner 1988, 1997). Ezek után a stop kritériumot már tapasztalati úton könnyen meghatározhatjuk (pl. az iteráció számának rögzítésével). Végül a Steiner-súlyokat az utolsó iteráció során elfogadott  $\varepsilon^2$  skálaparaméterrel (3.2.3.3.) alapján definiálhatjuk

$$W_{kk} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + e_k^2}. \quad (3.2.3.3.)$$

Mivel a Steiner-súlyok tartalmazzák az  $e_k$  mennyiségek inverziós ismeretlenjeit, a (3.2.2.) alapján felírható probléma nemlineáris, ezért a feladat ismét az iteratív újrasúlyozás módszerének (IRLS) alkalmazásával oldható meg (Scales et al. 1988). Így a Steiner-súlyok

segítségével és az iteratív újrásúlyozás módszerével igen hatékony robusztus és rezisztens inverziós eljárások definiálhatók (Dobróka et al. 1991).

#### 4. A Fourier transzformáció, mint sorfejtéssel diszkrétizált inverz feladat

A 2. fejezet a Fourier transzformáció zajérzékenységét szemléltette egy numerikus példán keresztül. A fejezeten belül láhattuk, hogy a mérési adatokban hordozott zaj ellen legsikeresebben nagyszámú adat felhasználásával védekezhünk úgy, hogy a Fourier transzformációt inverz feladatként fogalmazzuk meg.

##### 4.1. Előzmények

Az ME Geofizikai Tanszékén évtizedek óta követett kutatási irány a sorfejtéses inverzió, amelynek keretében a kutatandó modell (pl. földtani szerkezet) valamilyen folytonos változótól (pl. hely, frekvencia, lecsengési idő stb.) függő modellparaméterét alkalmasan választott bázisfüggvények szerinti sorfejtés formájában írjuk fel és a sorfejtési együtthatókra fogalmazzuk meg (rendszerint) túlhatározott inverz feladatot. Az ME Geofizikai Tanszékének kutatói ezt az eljárást különböző geofizikai módszerek inverziós feldolgozásában az elmúlt évtizedek alatt nagy hatékonysággal alkalmazták (Vass és Dobróka (2010), Dobróka és Völgyesi (2010), Gyulai et al. (2010), Gyulai és Ormos (1999), Kis (1998, 2002), Turai et al. (2010), Turai (1981), Dobróka és Szabó (2010), Szabó (2004)). Ehhez a kutatási irányhoz igazodva, az inverziós Fourier transzformációs eljárást sorfejtéses diszkrétizálásra alapoztam. Ebben a részben követtem Vass (2010) munkásságát, aki PhD értekezésében Hermite függvények, intervallumon konstans függvények, valamint Dirac-féle delta függvények bázisfüggvényekként való alkalmazhatóságát vizsgálta. Az inverziós eljárást azonban új, matematikailag következetes formalizmus segítségével építem fel.

##### 4.2. Az inverziós alapú Fourier transzformáció új algoritmusa

Az inverziós Fourier transzformáció esetében a folytonos frekvencia spektrumot valamilyen alkalmasan választott  $\Psi_n(\omega)$  frekvenciafüggő bázisfüggvény rendszer szerint fejtjük sorba

$$U(\omega) = \sum_{n=1}^M B_n \Psi_n(\omega), \quad (4.2.1.)$$

ahol  $B_n$  jelöli a komplex sorfejtési együtthatókat és  $\Psi_n(\omega)$  az  $n$ -ik ismert bázisfüggvényt.

A Fourier transzformációnál a direkt feladat megoldását adó eljárás az inverz Fourier transzformáció, amely  $k$ -ik mérési minta esetén a (4.2.2.) formában definiálható

$$u^{(elm)}(t_k) = u_k^{(elm)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j\omega t_k} d\omega. \quad (4.2.2.)$$

A (4.2.1.) egyenletet behelyettesítve a (4.2.2.) formulába a számított érték megadható

$$u^{(elm)}(t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^M B_n \Psi_n(\omega) \right) e^{j\omega t_k} d\omega = \sum_{n=1}^M B_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(\omega) e^{j\omega t_k} d\omega, \quad (4.2.3.)$$

vagy bevezetve a Jacobi-mátrixot

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(\omega) e^{j\omega t_k} d\omega = \mathcal{F}^{-1} \{ \Psi_n(\omega) \} \quad (4.2.4.)$$

a sorfejtési együtthatókban lineáris

$$u_k^{(elm)} = \sum_{n=1}^M B_n G_{kn} \quad (4.2.5.)$$

egyenletre jutunk. A (4.2.4.) kifejezés egy  $N \times M$  méretű mátrixot eredményez, amelynél  $N$  jelöli a mért adatok számát és  $M$  a sorfejtésben figyelembe vett ismeretlen tagok (sorfejtési együtthatók) számát.

#### 4.2.1. A bázisfüggvények egy lehetséges megválasztása

Mint (4.2.4.) alapján látható, a Jacobi-mátrix elemei a bázisfüggvény rendszer inverz Fourier transzformáltjaiként is felfoghatók. Ez egy komplex integrál kiszámítását igényli a  $(-\infty, \infty)$  határok között, ami rendszerint időigényes feladat. Ennek elkerülésére adódhat a gondolat, hogy a bázisfüggvényeket az inverz Fourier transzformáció sajátfüggvényei közül válasszuk (ha ezek léteznek), hiszen ekkor

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \Psi_n(\omega) \} = \lambda \Psi_n(t_k),$$

ezáltal pedig a Jacobi-mátrix elemeit egy szorzással megkaphatjuk

$$G_{k,n} = \mathcal{F}^{-1} \{ \Psi_n(\omega) \} = \lambda \Psi_n(t_k), \quad (4.2.1.1.)$$

ahol  $\lambda$  jelöli a sajátértéket,  $\Psi_n(t_k)$  a sajátfüggvényt.

A Fourier transzformáció és inverzének sajátfüggvényei a matematikában részletes vizsgálatot nyertek. Vaidyanathan (2008) bebizonyította, hogy ha valamely  $\Psi_0(\omega)$  függvény az inverz Fourier transzformáció sajátfüggvénye  $\lambda$  sajátértékkal, akkor

$$\Psi_1(\omega) = \omega \Psi_0(\omega) - \frac{d\Psi_0(\omega)}{d\omega}$$

szintén sajátfüggvénye  $j\lambda$  sajátértékkel, így tehát

$$\mathcal{F}^{-1}\{\Psi_1(\omega)\} = j\lambda\Psi_1(t). \quad (4.2.1.2.)$$

A fenti eljárást folytatva

$$\Psi_2(\omega) = \omega \Psi_1(\omega) - \frac{d\Psi_1(\omega)}{d\omega},$$

vagy általában

$$\Psi_n(\omega) = \omega \Psi_{n-1}(\omega) - \frac{d\Psi_{n-1}(\omega)}{d\omega} \quad (4.2.1.3.)$$

is sajátfüggvény  $j^n \lambda$  sajátértékkel. Legyen a generáló függvény most

$$\Psi_0(\omega) = e^{-\omega^2/2}, \quad (4.2.1.4.)$$

amely az  $\mathcal{F}^{-1}$  sajátfüggvénye

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-\omega^2/2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2} e^{j\omega t} d\omega = \lambda e^{-t^2/2}, \quad (4.2.1.5.)$$

ahol a sajátérték  $\lambda = 1$ . A (4.2.1.3.) szerint

$$\Psi_1(\omega) = \omega \Psi_0(\omega) - \frac{d\Psi_0(\omega)}{d\omega} = (2\omega) e^{-\omega^2/2}$$

$$\Psi_2(\omega) = \omega \Psi_1(\omega) - \frac{d\Psi_1(\omega)}{d\omega} = (4\omega^2 - 2) e^{-\omega^2/2}$$

$$\Psi_3(\omega) = \omega \Psi_2(\omega) - \frac{d\Psi_2(\omega)}{d\omega} = (8\omega^3 - 12\omega) e^{-\omega^2/2}$$

kifejezések is az inverz Fourier transzformáció sajátfüggvényei  $j^n$  sajátértékkel és az eljárás tetszőleges  $n$ -ig folytatható ( $n=1, 2, \dots, N$ ). Észrevehetjük, hogy a (zárójelben levő) polinomok sorozata követi az alábbi formulát

$$h_{n+1}^{(0)}(\omega) = 2\omega h_n^{(0)}(\omega) - 2n h_{n-1}^{(0)}(\omega), \quad (4.2.1.6.)$$

amely az Hermite-polinomok rekurziós formulája (Szegedi és Dobróka 2014). Így tehát arra az eredményre jutunk, hogy a Vaidyanathan (2008) által javasolt eljárás a (4.2.1.4.) generáló függvényekkel a

$$\Psi_n(\omega) = h_n^{(0)}(\omega) e^{-\omega^2/2}$$

sajátfüggvényeket állítja elő, mint az inverz Fourier transzformáció sajátfüggvényeit, melyek (normáló tényezőtől eltekintve) a  $H_n^{(0)}(\omega)$  Hermite függvényeknek felelnek meg.

Ez az eredmény a matematikában ismert (Duoandikoetxea 1995), azonban a fenti eljárással további, az inverziós Fourier transzformációban alkalmazható sajátfüggvények is előállíthatók.

#### 4.2.2. Az Hermite függvények, mint bázisfüggvények

A (3.1.1.) direkt feladat egyenletében szereplő modellparaméterek a sorfejtési együtthatók, melyek meghatározása jelenti az inverz feladat megoldását. A sorfejtéses geofizikai inverzió területén célszerű négyzetesen integrálható, teljes, ortogonális és normált bázisfüggvény rendszereket alkalmaznunk az inverziós feladat numerikus stabilitásának javítása érdekében (a többértelműségi probléma kiküszöbölése végett). Fontos feladat a bázisfüggvények helyes választása, mert jó megválasztásuk esetén az adatok számától jóval kisebb számú sorfejtési együttható tag már elegendő pontossággal közelíti a frekvenciaspektrumot, mely általános esetben a valós számok  $(-\infty, \infty)$  intervallumán értelmezett. A fenti megfontolással választotta Vass (2010) az Hermite függvényeket az inverziós alapú Fourier transzformáció bázis függvényeinek. Az előzőekben Vaidyanathan (2008) eljárását követve beláthattuk, hogy az Hermite függvények az inverz Fourier transzformáció sajátfüggvényei, ami a Jacobi-mátrix előállítását rendkívüli mértékben egyszerűsíti. Ahhoz, hogy az alapértelmezésű Hermite függvényeket számítani tudjuk, ismernünk kell különböző  $n$  értékek mellett az Hermite-polinomokat, melyek a Rodriguez-formula alapján határozhatók meg (Ney da Silva és de Campos 2006)

$$h_n^{(0)}(\omega) = (-1)^n e^{\omega^2} \left( \frac{d}{d\omega} \right)^n e^{-\omega^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (4.2.2.1.)$$

Közöttük fennáll az alábbi rekurziós formula

$$h_{n+1}^{(0)}(\omega) = 2\omega h_n^{(0)}(\omega) - 2n h_{n-1}^{(0)}(\omega), \quad (4.2.2.2.)$$

ahol  $h_0^{(0)}(\omega) = 1$ ,  $h_1^{(0)}(\omega) = 2\omega$ . Az Hermite-polinomokra teljesül a (4.2.2.3.) ortogonalitási feltétel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} h_n^{(0)}(\omega) h_m^{(0)}(\omega) d\omega = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}, \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}, \quad (4.2.2.3.)$$

ahol  $\delta_{nm}$  a Kronecker szimbólumot jelöli. E formula alapján definiálni tudjuk az alap értelmezésű (normált)  $H_n^{(0)}(\omega)$  Hermite függvényt

$$H_n^{(0)}(\omega) = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}} h_n^{(0)}(\omega)}{\sqrt{\sqrt{\pi} n! 2^n}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) . \quad (4.2.2.4.)$$

A  $H_n^{(0)}(\omega)$  függvény nemcsak teljes, ortogonális, hanem már (4.2.2.3.) szerint ortonormált rendszert is alkot

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(0)}(\omega) H_m^{(0)}(\omega) d\omega = \delta_{nm} . \quad (4.2.2.5.)$$

A fentiekben láthattuk, hogy az Hermite függvények sajátos tulajdonsága, hogy az inverz Fourier transzformációnak sajátfüggvényei

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_n^{(0)}(\omega)\} = (j)^n H_n^{(0)}(t), \quad (4.2.2.6.)$$

a Fourier transzformáció esetében pedig

$$\mathcal{F}\{H_n^{(0)}(t)\} = (-j)^n H_n^{(0)}(\omega) . \quad (4.2.2.7.)$$

Törekvésünk szerint ez azzal az előnnyel jár, hogy a Jacobi-mátrix (4.2.4.) kifejezését, mint komplex integrált nem kell kiszámítani, elegendő a sajátértékkel való szorzás.

Az alap Hermite függvényeket bázisfüggvényként sorfejtéses alakban írhatjuk a (4.2.2.8.) alapján

$$U(\omega) = \sum_{n=1}^M B_n H_n(\omega), \quad (4.2.2.8.)$$

ahol  $B_n$  a modellparamétereket, jelen esetben az inverzió keretében becsült ismeretlen sorfejtési együtthatókat jelöli.

### 4.2.3. A skálázott Hermite függvények

Az adatfeldolgozásban szereplő problémák változatossága miatt az Hermite függvényeket skáláznunk kell. A módosított (skálázott) Hermite-polinomok Rodriguez-formulája (4.2.2.1.) helyett így

$$h_n(\omega, \alpha) = (-1)^n e^{\alpha\omega^2} \left( \frac{d}{d\omega} \right)^n e^{-\alpha\omega^2}, \quad (4.2.3.1.)$$

és ennek következtében a (4.2.2.2.) rekurziós formula is módosul

$$h_{n+1}(\omega, \alpha) = 2\omega\alpha h_n(\omega, \alpha) - 2n\alpha h_{n-1}(\omega, \alpha), \quad (4.2.3.2.)$$

ahol  $\alpha$  a skálázási tényező és  $h_0(\omega, \alpha) = 1, h_1(\omega, \alpha) = 2\alpha\omega$  (Gröbner és Hoffreiter 1958).

A skálázott Hermite-polinomok esetében is felírható az ortogonalitási reláció

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\omega^2} h_n(\omega, \alpha) h_m(\omega, \alpha) d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} (2\alpha)^n n! \delta_{nm}. \quad (4.2.3.3.)$$

A skálázott Hermite függvény pedig az alábbi kifejezéssel adható meg

$$H_n(\omega, \alpha) = \frac{e^{-\frac{\alpha\omega^2}{2}} h_n(\omega, \alpha)}{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha} n! (2\alpha)^n}}, \quad (4.2.3.4.)$$

ahol  $h_n(\omega, \alpha)$  a skálázott Hermite-polinomot, a nevezőben szereplő kifejezés a normáló tényezőt jelöli. Az így bevezetett Hermite függvények szintén ortonormáltak (4.2.3.3.) szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\omega, \alpha) H_m(\omega, \alpha) d\omega = \delta_{nm}. \quad (4.2.3.5.)$$

A frekvenciaspektrumot (4.2.3.6.) alapján határozhatjuk meg, ha a skálázott Hermite függvényeket bázisfüggvényként használjuk

$$U(\omega) = \sum_{n=1}^M B_n H_n(\omega, \alpha). \quad (4.2.3.6.)$$

Az alábbi jelölés bevezetésével

$$\omega' = \sqrt{\alpha}\omega \quad (4.2.3.7.)$$

a módosított Hermite-polinomok visszavezethetők az alapesetre. Helyettesítsük be a (4.2.3.7.) egyenletet a (4.2.3.1.) kifejezésbe. Ekkor a (4.2.2.1.) egyenlet helyett adódik

$$\begin{aligned} h_n(\omega, \alpha) &= (\sqrt{\alpha})^n (-1)^n e^{\omega'^2} \left( \frac{d}{d\omega'} \right)^n e^{-\omega'^2} \\ &= (\sqrt{\alpha})^n h_n^{(0)}(\omega') = (\sqrt{\alpha})^n h_n^{(0)}(\sqrt{\alpha}\omega). \end{aligned} \quad (4.2.3.8.)$$

Hasonlóan az előzőekhez, a módosított Hermite függvények is visszavezethetők az alapértelmezésű  $H_n^{(0)}(\omega)$  függvényekre. A (4.2.3.4.) egyenlet szerint a következő formulát kapjuk

$$\begin{aligned} H_n(\omega, \alpha) &= \frac{e^{-\frac{\omega'^2}{2}} (\sqrt{\alpha})^n h_n^{(0)}(\omega')}{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha} n! 2^n \alpha^n}} = \sqrt[4]{\alpha} \frac{e^{-\frac{\omega'^2}{2}} h_n^{(0)}(\omega')}{\sqrt{\sqrt{\pi} n! 2^n}} \\ &= \sqrt[4]{\alpha} H_n^{(0)}(\omega') = \sqrt[4]{\alpha} H_n^{(0)}(\sqrt{\alpha}\omega). \end{aligned} \quad (4.2.3.9)$$

A (4.2.4.) Jacobi-mátrix a  $H_n(\omega, \alpha)$  bázisfüggvényekkel írva a következő alakot ölti

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\omega, \alpha) e^{j\omega t_k} d\omega, \quad (4.2.3.10.)$$

amit a (4.2.3.9.) egyenlet felhasználásával (4.2.3.11.) szerint is írhatunk

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[4]{\alpha} H_n^{(0)}(\omega') e^{j\omega' t_k} d\omega'. \quad (4.2.3.11.)$$

Az  $\omega t = \omega' t'$ ,  $\omega' = \sqrt{\alpha}\omega$  and  $t' = \frac{t}{\sqrt{\alpha}}$  bevezetésével a Jacobi-mátrix könnyen számítható

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(0)}(\omega') e^{j\omega' t_k'} d\omega' = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}} \mathcal{F}^{-1}\{H_n^{(0)}(\omega')\}. \quad (4.2.3.12.)$$

Az Hermite függvények (4.2.2.6.) tulajdonságát felhasználva a  $G_{kn}$  Jacobi-mátrix újra írható egyszerűbb formában

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}} (j)^n H_n^{(0)}(t') = \frac{(j)^n}{\sqrt[4]{\alpha}} H_n^{(0)}\left(\frac{t_k}{\sqrt{\alpha}}\right), \quad (4.2.3.13.)$$

amivel a Jacobi-mátrix egyszerűen és gyorsan meghatározható. (Más bázisfüggvények alkalmazása esetén a Jacobi-mátrix elemeit egy komplex integrál kiszámításával határozhatjuk meg, ami a számítási időt nagyságrendileg megnöveli.) Az Hermite függvényeknek ez az előnyös tulajdonsága különösen fontos (a geofizikai alkalmazásokban gyakran előforduló) kétváltozós Fourier transzformáció esetén, mint azt majd látni fogjuk a 6. és 7. fejezetben.

#### 4.2.4. LSQ algoritmus skálázott Hermite függvényekre alapozva (LSQ-FT)

A fentiek szerint a direkt feladatban szereplő Jacobi-mátrix elemei (4.2.3.13.) segítségével egyszerűen és gyorsan előállíthatók, így a túlhatározott inverz feladat megfogalmazható. Ez esetben a mérési adatok száma nagyobb, mint a meghatározandó paraméterek száma ( $N > M$ ).

A mért adatok vektora és a számított adatok vektora közötti eltérés így írható

$$e_k = u_k^{(mért)} - u_k^{(számított)} = u_k^{(mért)} - \sum_{n=1}^M B_n G_{kn}. \quad (4.2.4.1.)$$

$L_2$ -norma választása mellett a célfüggvény

$$E_2 = \sum_{k=1}^N e_k^2 = \sum_{k=1}^N (u_k^{(mért)} - u_k^{(számított)})^2 = \sum_{k=1}^N (u_k^{(mért)} - \sum_{n=1}^M B_n G_{kn})^2 \quad (4.2.4.2.)$$

minimumánál kapjuk a túlhatározott inverz feladat megoldását. Ekkor a Gauss-féle legkisebb négyzetek (LSQ) módszerének normálegyenlet rendszeréhez jutunk

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \underline{\underline{\mathbf{G}}} \bar{\mathbf{B}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \bar{\mathbf{u}}^{(mért)} \quad (4.2.4.3.)$$

A (4.2.4.3.) normálegyenlet rendszer megoldásával a modellparaméter értékek ( $B_n$  sorfejtési együtthatók) becsülhetők

$$\bar{\mathbf{B}} = (\underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \underline{\underline{\mathbf{G}}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \bar{\mathbf{u}}^{(mért)}, \quad (4.2.4.4.)$$

ezek ismeretében a frekvenciaspektrum tetszőleges frekvencián előállítható

$$U^{becsült}(\omega) = \sum_{n=1}^M B_n^{becsült} \Psi_n(\omega), \quad (4.2.4.5.)$$

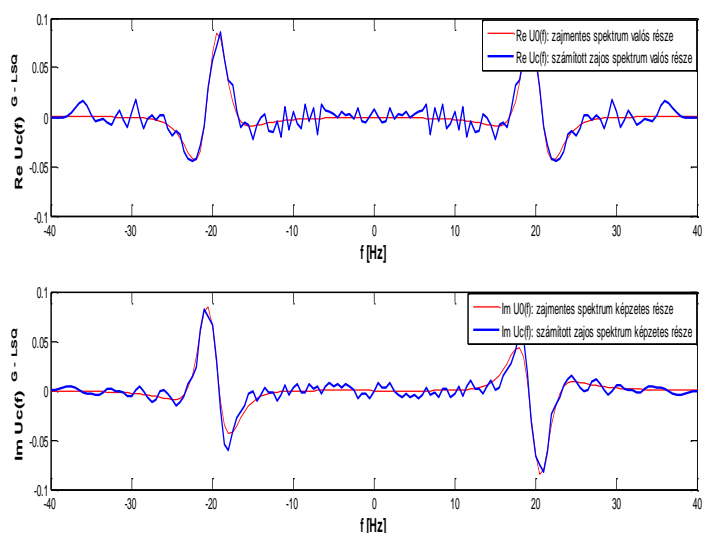
ahol a  $\Psi_n(\omega)$  (4.2.3.9.) egyenlete szerint adott. Az Hermite függvényekkel diszkrétizált H-LSQ-FT eljárást PhD értekezésében Vass (2010) tárgyalta. A fentiekben megmutatott LSQ-FT eljárás algoritmusában eltér a Vass által közöltektől, amennyiben a Jacobi-mátrix előállításában az Hermite függvényeket, mint a Fourier transzformáció sajátfüggvényeit használjuk fel, ami a Jacobi-mátrix előállításában fontos szerepet kap. Itt kell rámutatnom, hogy a jelen értekezésben kidolgozott inverziós alapú Fourier transzformációs eljárások megnevezésében eltértek Vass (2010) nevezéktanától. Az említett dolgozatban ugyanis a Szerző különböző bázisfüggvények alkalmazásával definiált inverziós Fourier transzformációs eljárásokat vezetett be (H-LSQ-FT, C-LSQ-FT, D-LSQ-FT, aszerint, hogy Hermite-, Cellánként konstans-, vagy Dirac-delta függvényekkel diszkrétizált). A Jelen értekezésben csupán Hermite függvények szerinti sorfejtést alkalmazok, ezért lehetséges, de nem szükségszerű a (Vass (2010)-ben megkülönböztetésre használt) H- előtag kiírása. Ennek elhagyása annál is inkább indokolt, mivel a dolgozat alap gondolatának lényeges eleme az, hogy a diszkrétizációra használt függvény a Fourier transzformáció sajátfüggvénye legyen, és mint ilyet csupán az Hermite függvényeket alkalmaztam.

Ha a mérési adatsort terhelő véletlen zaj eloszlása eltér a Gauss-eloszlástól, ill. többféle forrásból származó eltérő eloszlású zajok hatása együttesen érvényesül, a fenti inverziós eljárás nem ad optimális becslést. Ilyen esetben más módszer megválasztása szükséges. Az új, skálázott Hermite függvényekre alapozott LSQ-FT algoritmus vizsgálatát egy numerikus példán keresztül szemléltetem.

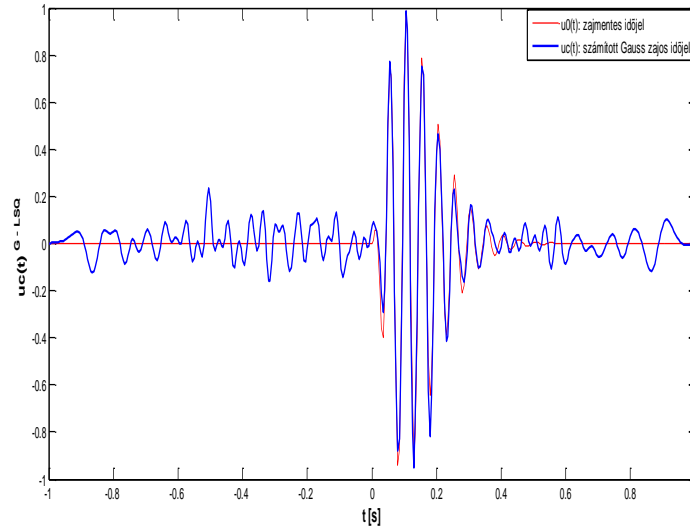
### 4.3. Numerikus vizsgálatok

A 2.2.2. alfejezetben bemutatott, szintetikus előállított bemenő adatrendszerünket Gauss (I. adatrendszer), ill. Cauchy zajjal terheltem (II. adatrendszer) és teszteltem a fentiekben bevezetett Hermite függvényes diszkrétizálást, valamint a Gauss-féle legkisebb

négyzetek módszerét alkalmazó inverziós Fourier transzformációs eljárást (LSQ-FT). A Gauss eloszlást követő zajjal terhelt időjel képét a 3. ábra szemléltette. A 7. ábrán az LSQ-FT inverzióval előállított Gauss zajos frekvenciaspektrum valós és képzetes része látható. A könnyebb összehasonlíthatóság érdekében piros színnel jelenítettem meg az eredeti zajmentes frekvenciaspektrumot, kék színnel pedig az inverzióval előállított frekvenciaspektrumot. Ez alapján mondhatom, hogy az algoritmusban ( $M=120$  sorfejtési együttható érték beállítása mellett) inverziós eredményül kapott spektrum elegendő pontossággal közelíti az eredeti frekvencia spektrumot (ld. 2. ábra). A 8. ábrán a Gauss zajos adatokból LSQ-FT-vel előállított spektrum inverz Fourier transzformációjával számított időjelét szemléltetem.

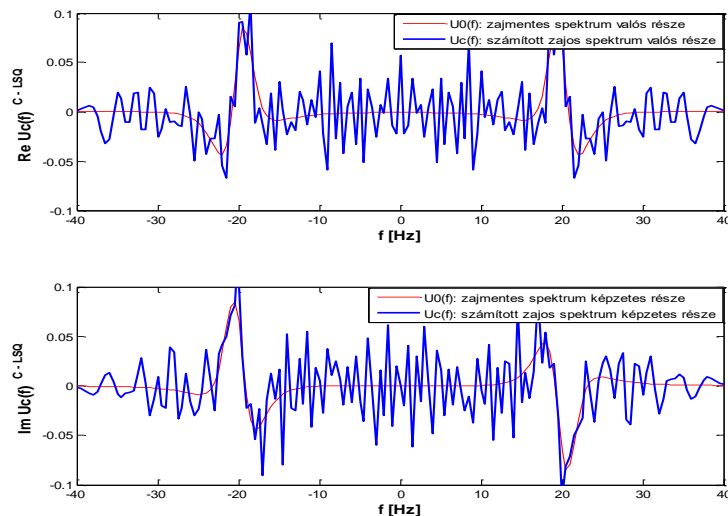


7. ábra: A Gauss zajjal terhelt adatrendszer LSQ-FT inverzióval előállított spektruma

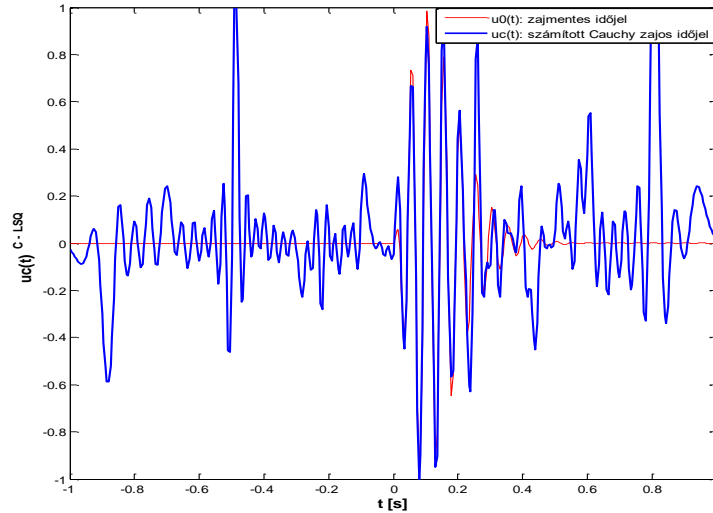


8. ábra: A visszszámított időjel az I. adatrendszer esetén

A Cauchy zajos (II.) adatrendszer a 4. ábra szerint állt elő. A zajos időjel LSQ-FT inverzióval előállított frekvenciaspektrumának valós, ill. képzetes része a 9. ábrán látható. A 7. ábrával való összehasonlítás mutatja, hogy a Cauchy zajjal terhelt adatok spektrumát az LSQ-FT eljárás lényegesen rosszabb zajviszonyok mellett állítja elő. Ez nem meglepő, ha figyelembe vesszük, hogy az LSQ eljárás optimális eredményt Gauss eloszlást követő zaj esetén adhat. Hasonló megállapítást tehetünk a 8. és 10. ábrák alapján, az eredmény spektrumokon végzett inverz Fourier transzformációval előállított időjelek összehasonlításával. Az előző ábrázolásnál említett beállítások nem változtak (piros szín jelöli a zajmentes esetet, a kék az inverziós eredményeket mutatja).



9. ábra: A Cauchy zajjal terhelt adatrendszer LSQ-FT inverzióval előállított spektruma



10. ábra: A visszaszámított időjel a II. adatrendszer esetén

Az LSQ-FT eljárás illeszkedésének jellemzése érdekében meghatároztam a mért (zajjal terhelt szintetikus adatok) és az inverziós eredmény ismeretében (az eredmény spektrumon inverz Fourier transzformációval) számított adatok távolságát

$$d_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( u^{(számított)}(t_k) - u^{(mért)}(t_k) \right)^2}, \quad (4.3.1.)$$

illetve a frekvenciatartománybeli távolságot

$$D_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ \operatorname{Re} \left[ U^{(számított)}(f_k) - U^{(mért)}(f_k) \right] \right]^2 + \left[ \operatorname{Im} \left[ U^{(számított)}(f_k) - U^{(mért)}(f_k) \right] \right]^2 \right\}}. \quad (4.3.2.)$$

$N$  mindkét tartományban a mintavételi pontok számát jelöli. A (2.2.2.1.) jel frekvencia spektruma analitikusan is előállítható, a (4.3.2.) kifejezésben ezt jelöltem el  $U^{(számított)}(f_k)$ -val (elméleti, vagy számított spektrum), míg a mérési adatokból előállított spektrumot  $U^{(mért)}(f_k)$ -val azonosítottam.

Az eredményt az 1. táblázat szemlélteti. Ennek alapján megállapítható, hogy az I. adatrendszer esetén a DFT-vel összehasonlítva az LSQ-FT eljárás másfélszeres javulást eredményez mind az idő-, mind pedig a frekvenciatartományban. A II. adatrendszer esetén ez a faktor a 2.0 körül van. A távolság adatok is mutatják, hogy az LSQ-FT Cauchy zaj esetén lényegesen gyengébb eredményt ad, ami indokolja a továbbfejlesztést a robusztus inverzió irányába.

1. táblázat: A zajmentes-, az I. adatrendszerbeli és a II. adatrendszerbeli értékek közötti RMS különbség értékek

	DFT		LSQ-FT	
	A Gauss zajos és a zajmentes adatok alapján kapott eltérés	A Cauchy zajos és a zajmentes adatok alapján kapott eltérés	A Gauss zajos és a zajmentes adatok alapján kapott eltérés	A Cauchy zajos és a zajmentes adatok alapján kapott eltérés
$d_{RMS}$ (időtartomány)	<b>0.1032</b>	<b>0.4554</b>	<b>0.0609</b>	<b>0.2304</b>
$D_{RMS}$ (frekvencia tartomány)	<b>0.1549</b>	<b>0.6508</b>	<b>0.0996</b>	<b>0.3170</b>

#### 4.4. Az eredmények összefoglalása

A fejezetben az inverziós alapú Fourier transzformáció új algoritmusára tettem javaslatot. Ennek során a Vass (2010) által, az ME Geofizikai Tanszékén kidolgozott sorfejtéses inverzió metodikáját követtem, amiből adódik a Fourier transzformáció vonatkozásában, hogy a probléma Jacobi-mátrixa a bázisfüggvények inverz Fourier transzformáltjaként írható fel. A numerikusan a lehető „leggazdaságosabb” (legkisebb futási idő igényű) eljárás érdekében bázisfüggvényeként olyan függvényrendszer alkalmazására törekedtem, amely az inverz Fourier transzformáció sajátfüggvénye. A Vaidyanathan (2008) által publikált eljárást követve bemutattam, hogy a generáló függvény  $e^{-\omega^2/2}$  szerinti választásával kapható sajátfüggvény rendszer (normáló tényezőtől eltekintve) az Hermite függvényekre vezet. Így ezek a sorfejtés bázisfüggvényeként választhatók. Elfogadva Vass (2010) észrevételét, miszerint a skálázott Hermite függvények a sorfejtéses inverzióban rugalmasabban - a geofizikai inverzió követelményeinek sokkal inkább megfelelően - alkalmazható, bázisfüggvényként a skálázott Hermite függvényeket választottam. Megadtam a skálázott és skálázatlan Hermite függvények közötti átszámítás formuláit, amelyeket alkalmazva bemutattam, hogy a Jacobi-mátrix a skálázatlan Hermite függvényekkel közvetlenül kifejezhető. Ezáltal az inverz feladat elméleti adatainak meghatározására egy egyszerű, a sorfejtési együtthatók lineáris kombinációjának tekinthető kifejezésre jutottam.

Ennek felhasználásával az eltérésvektor  $L_2$ -normájának minimalizálásával kidolgoztam a Fourier transzformációt tisztán túlhatározott inverz feladatként kezelő, Hermite függvényekkel diszkrétizált LSQ-FT inverziós eljárását, ami a Vass (2010) általi bevezetett H-LSQ-FT eljárás módosított változatának tekinthető. Az LSQ-FT eljárás algoritmusában

eltér a Vass által közöltektől, mivel a Jacobi-mátrix előállításában az Hermite függvényeket, mint a Fourier transzformáció sajátfüggvényeit használjuk fel.

Egy numerikus példában bemutattam az eljárás működését és összehasonlítást tettem a Gauss zajjal terhelt adatrendszer DFT-vel, valamint az LSQ-FT-vel számított spektrumok között, megmutatva az LSQ-FT eljárás nagyobb pontosságát. Cauchy zajjal terhelt adatrendszer esetében az inverziós eredmény jelentősen romlik, igazolva azt az ismert tény, hogy a legkisebb négyzetek módszere Gauss zajjal terhelt adatrendszer esetén ad optimális eredményt. (Ezzel együtt az LSQ-FT mintegy kétszer jobb eredményt szolgáltatott, jelentős zajelnyomó képességet tanúsított, ami a Fourier transzformáció inverz feladatként történt kezelésének a következménye.) A jelen fejezetben elért eredményeket az alábbi tézisben foglalom össze, ezen belül két altézist állítok fel.

### 1. tézis

„Abból a tényből kiindulva, hogy sorfejtéses diszkrétizációra alapozott inverziós Fourier transzformáció esetén a probléma Jacobi-mátrixa a bázisfüggvények inverz Fourier transzformáltja, célul tűztem ki olyan bázisfüggvények alkalmazását, amelyek a Fourier transzformációnak sajátfüggvényei, mivel ekkor a Fourier transzformált (mint komplex integrál) a sajátérték és a bázisfüggvény szorzataként állítható elő. Vaidyanathan (2008) Fourier transzformált sajátfüggvényeinek konstrukciójára kidolgozott eljárását követve megmutattam, hogy az alap értelmezésű (skalázatlan) Hermite függvények, mint a Fourier transzformáció sajátfüggvényei, előnyösen alkalmazhatók a sorfejtéssel diszkrétizált inverziós Fourier transzformáció algoritmusának felépítésében.

- a.) Ennek alapján megadtam a probléma Jacobi-mátrixának és a direkt feladat megoldásának formuláit skalázatlan és skalázott Hermite függvényekre alapozva.
- b.) Az új számítási eljárást felhasználva a mért és számított adatok eltérésvektora  $L_2$ -normájának számításában módosítottam a Vass Péter által bevezetett H-LSQ-FT eljárást és Gauss, ill. Cauchy zajjal terhelt adatrendszeren teszteltem az inverziós alapú Fourier transzformáció Hermite függvényekkel (mint a Fourier transzformáció sajátfüggvényeivel) diszkrétizált LSQ-FT eljárását.”

## 5. Fourier transzformáció, mint robusztus inverz feladat

Mint láttuk, a legkisebb négyzetek módszerével definiált inverziós Fourier transzformáció (LSQ-FT) Gauss zajjal terhelt I. adatrendszer esetén elfogadható eredményt ad. Ugyanakkor a Gauss-tól lényegesen eltérő, Cauchy-eloszlást követő zajjal terhelt II. adatrendszer LSQ-FT-vel számított spektruma szembetűnően zajosabb. Ez a várakozásnak megfelel, mivel az LSQ inverziós módszer Gauss-eloszlású zaj esetén ad optimális eredményt. Ismeretes, hogy az ún. robusztus inverziós módszerek Gauss-tól eltérő zaj statisztikák esetén is adhatnak elfogadható, az LSQ-nál lényegesen jobb eredményt. Az előző fejezetben, részleteiben is megfogalmaztam a linearizált LSQ-FT eljárást, különösen ügyelve a Jacobi-mátrix elemeinek gyors és pontos meghatározására. Az eljárás robusztifikálása a 3. fejezetben foglaltak szerint, a megfelelő (Cauchy-, vagy Steiner) súlyokkal definiált súlyozott legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával végezhető el.

### 5.1. Steiner-súlyok alkalmazása (S-IRLS-FT)

A kiugró adatokkal (outlierek) szemben a 3.2. alfejezetben sikeresen alkalmazható, és az inverzió általános gyakorlatában elfogadott eljárásnént említettem az iteratív újrasúlyozás módszerének a Cauchy-súlyokkal való kombinálását. A minimalizálandó függvény a (3.2.2.)-beli eltérések súlyozott normája

$$E_w = \sum_{k=1}^N W_{kk} e_k^2, \quad (5.1.1.)$$

amely a diagonális súlymátrix elemeiként a (3.2.2.1.) Cauchy-súlyokat, valamint az eltérésvektor elemeit

$$e_k = \mathbf{u}_k^{(mért)} - \mathbf{u}_k^{(számított)} \quad (5.1.2.)$$

tartalmazza. Az eljárásnak jelentős hátránya, hogy a Cauchy-súlyok  $\sigma^2$  skálaparaméterét a priori ismernünk kell. A probléma megoldására az ME Geofizikai Tanszékének munkatársai számos publikációban javasolták a Steiner professzor által kidolgozott Leggyakoribb érték módszerével (MFV) bevezetett súlyok alkalmazását (Dobróka et al. 1991), mivel az eljárásban szereplő  $\varepsilon^2$  skálaparaméterek ekkor az adatrendszerből automatikusan előállíthatók.

A Tanszéken kifejlesztett inverziós módszer kiugró hibákkal terhelt adatrendszerek inverziós Fourier transzformációjára való alkalmazhatóságát egy korábbi tanulmányban témavezetőmmel már bemutattuk (Szegedi és Dobróka 2012). Ebben a dolgozatban, a

korábbiakban MFV-súlyokként említett mennyiségeket az MFV-módszer megalkotója tiszteletére Steiner-súlyoknak neveztük, és ezt a megnevezést jelen dolgozatomban is követem.

A 3.2. fejezetben elmondottak szerint a Steiner-súlyok bevezetése az Iteratív újrásúlyozás módszerének (IRLS) alkalmazását követeli meg. Az ennek megfelelő inverziós Fourier transzformációs algoritmust kidolgoztam és a továbbiakban S-IRLS-FT rövidítéssel jelölöm. Az iteratív újrásúlyozás módszerének Steiner-súlyokkal kombinált algoritmusát a 3.2.3. fejezetben már bemutattam.

Az eljárás során az (5.1.1.) célfüggvényt minimalizáljuk, mely nem kvadratikus (ugyanis a súlymátrix

$$W_{kk} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + e_k^2}$$

az eltérésvektor elemeiben

$$e_k = u_k^{(mért)} - u_k^{(számított)} = u_k^{(mért)} - \sum_{n=1}^M B_n G_{kn}$$

tartalmazza az ismeretlen modellparamétereket, a  $B_n$  sorfejtési együtthatókat), így az inverz probléma nemlineárisra válik és az IRLS eljárással oldható meg újra (Scales et al. 1988). A Jacobi-mátrix elemeit - az Hermite-polinomok előnyös tulajdonságait kihasználva - az eljárás keretében a (4.2.3.13.) szerint számítjuk

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}} (j)^n H_n^{(0)}(t') = \frac{(j)^n}{\sqrt[4]{\alpha}} H_n^{(0)}\left(\frac{t_k}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Az IRLS eljárás 0. iterációs lépésében a Gauss-féle legkisebb négyzetek módszerével oldjuk meg a problémát

$$\bar{B}^{(0)} = (\underline{\underline{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{G}^T \bar{u}^{(mért)}}}.$$

Ezekkel a sorfejtési együtthatókkal előállíthatjuk a számított adatok egy közelítését

$$u_k^{(0)} = \sum_{n=1}^M B_n^{(0)} G_{kn},$$

és felírhatjuk az eltérés vektor közelítő elemeit

$$e_k^{(0)} = u_k^{(mért)} - \sum_{n=1}^M B_n^{(0)} G_{kn},$$

amiben a súlyokat a

$$W_{kk}^{(0)} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (e_k^{(0)})^2}.$$

formula szerint számíthatjuk. Az első iterációban a hibafüggvényt így közelítjük

$$E_w^{(1)} = \sum_{k=1}^N W_{kk}^{(0)} e_k^2,$$

amely kifejezés most már kvadratikus (a súlyok az előző iterációból származó, a jelen iteráció ismeretlenjeit nem tartalmazó konstansok) és minimalizálása a súlyozott legkisebb négyzetek módszerének megfelelő inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet

$$\bar{B}^{(1)} = (\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{W}}^{(0)} \underline{\underline{G}})^{-1} \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{W}}^{(0)} \bar{u}^{(mért)},$$

melynek megoldását ismét csak az

$$e_k^{(1)} = u_k^{(mért)} - \sum_{n=1}^M B_n^{(1)} G_{kn}$$

eltérések, ill. a súlymátrix

$$W_{kk}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (e_k^{(1)})^2}$$

újabb közelítésének számítására használjuk. Az IRLS eljárás  $q$ -ik lépésében kapott normálegyenlet rendszer megoldása

$$\bar{B}^{(q)} = (\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{W}}^{(q-1)} \underline{\underline{G}})^{-1} \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{W}}^{(q-1)} \bar{u}^{(mért)},$$

amellyel számított eltérések

$$e_k^{(q)} = u_k^{(mért)} - \sum_{n=1}^M B_n^{(q)} G_{kn},$$

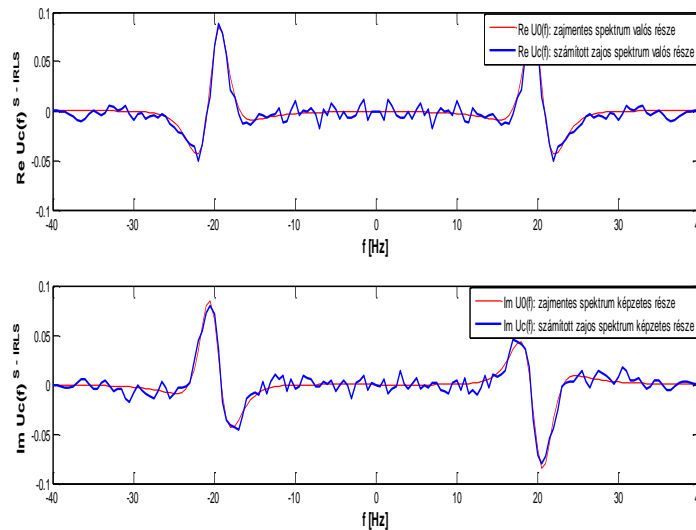
ill. az új Steiner-súlyok

$$W_{kk}^{(q)} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (e_k^{(q)})^2}.$$

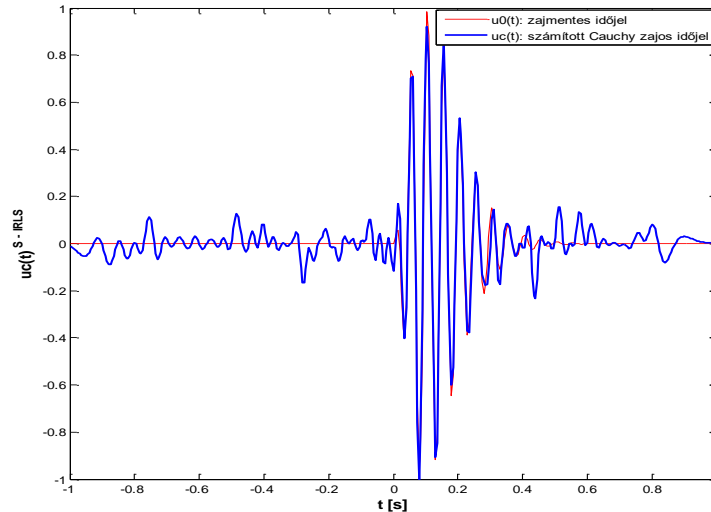
Az így definiált IRLS iterációs eljárás valamely alkalmasan választott stopkritérium teljesüléséig folytatható, megoldásként az utoljára kapott sorfejtési együtthatókat fogadjuk el. A fentiekben bevezetett eljárást a továbbiakban S-IRLS-FT rövidítéssel jelöljük. (Itt is megjegyezhetjük, hogy a Vass (2010) nevezéktana alapján lehetséges lenne a H-S-IRLS-FT megjelölés, de a korábbiakban elmondottak szerint a H-előtagot elhagyjuk, mivel kizárólag Hermite függvények szerinti diszkretizálással foglalkoztam.)

## 5.2. Numerikus vizsgálatok

Az S-IRLS-FT eljárás kiugró adatokkal (II. adatrendszer) szemben mutatott rezisztenciáját egy numerikus példán keresztül demonstrálom. A kapott frekvenciaspektrum valós és képzetes részét a 11. ábrán szemléltetem. Összehasonlítva a 6. ábrával (DFT-vel számított Cauchy zajos Fourier spektrum) a Steiner-súlyokkal definiált IRLS algoritmus kétségkívül jelentős javulást eredményezett. Igen érdekes az S-IRLS-FT eljárással kapott spektrum inverz transzformációjával előállított időjel vizsgálata is, melyet a 12. ábra szemléltet. Összevetve a 4. ábrával láthatjuk, hogy milyen mértékben „tisztult meg” a zajtól az inverzióval kapott spektrumon számított időtartománybeli adatsor. Ez ugyancsak jó zajelnyomó tulajdonságot igazol az adattérben is.



11. ábra: Az S-IRLS-FT-vel kapott frekvenciaspektrum valós és képzetes része



12. ábra: Az S-IRLS-FT-vel kapott zajos időjel

A 2. táblázatban levő távolság adatok értékei is mutatják, hogy mind az adat-, mind a frekvenciatartományban az S-IRLS-FT alkalmazása minimum egy nagyságrenddel jobb eredményre vezet a DFT-vel számított értékekhez képest. Ez a jelentős zajelnyomó képesség gyakorlati problémák megoldása során igen előnyös lehet. Amint várható volt, az S-IRLS-FT eljárás Cauchy-eloszlást követő zajjal terhelt adatrendszer esetén az LSQ-FT eljárással összehasonlítva is lényegesen jobb eredményre vezet.

2. táblázat: Idő- és frekvenciatartományban számított távolságok Cauchy zajjal terhelt, ill. zajmentes adatokon alkalmazott DFT, LSQ-FT, ill. S-IRLS-FT esetén

	<b>DFT</b>	<b>LSQ-FT</b>	<b>S-IRLS-FT</b>
	DFT-vel Cauchy zajos és a zajmentes adatokon számított eredmény eltérése	LSQ-FT-vel Cauchy zajos és a zajmentes adatokon számított eredmény eltérése	IRLS-FT-vel Cauchy zajos és a zajmentes adatokon kapott eredmény eltérése
$d_{RMS}$ (időtartomány)	<b>0.4554</b>	<b>0.2304</b>	<b>0.0381</b>
$D_{RMS}$ (frekvencia tartomány)	<b>0.6508</b>	<b>0.3170</b>	<b>0.0513</b>

Az új, S-IRLS-FT módszer hatékonyságának igazolását mutatja az is, hogy a fejezetben elért eredményeket összefoglaló kézirat megjelent a Mathematical Geosciences impakt faktoros folyóiratban (Dobróka et al. 2014).

### 5.3. Az eredmények összefoglalása

A fejezetben az inverziós alapú Fourier transzformáció új, Steiner-súlyokkal definiált algoritmusára tettem javaslatot. A 4. részben bemutatott skálázott Hermite függvényes diszkrétizáción alapuló LSQ-FT inverziós algoritmus Gauss-, ill. Cauchy-eloszlású adatokon végzett vizsgálata megerősítette, hogy szükséges egy olyan robusztus/rezisztens módszer kidolgozása, amely a mérési adatokon hordozott zajokkal szemben „ellenállóbban” viselkedik. Az eljárás robusztifikálása a 3. fejezetben foglaltak szerint a 3.2.-ben bemutatott (az általános geofizikai inverzióból ismert) Steiner-súlyokkal definiált súlyozott legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával végezhető el. Az iteratív újrásúlyozás módszerében az eltérésvektor súlyozott normájának minimalizálásával (a skálázott Hermite függvények alkalmazásával a 4. fejezetben foglalt eredményeket felhasználva) kidolgoztam az S-IRLS-FT inverziós eljárást, amely a Fourier transzformációt tisztán túlhatározott inverz feladatként kezeli.

Egy numerikus példán keresztül demonstráltam az eljárás hatékony működését és összehasonlítást tettem a Cauchy zajjal terhelt adatrendszer DFT-vel, valamint az S-IRLS-FT-vel számított spektrumai között. A vizsgálatok során arra a következtetésre jutottam, hogy az S-IRLS-FT a Gauss-tól távol eső Cauchy-eloszlású zajok esetén is képes hatékonyan elnyomni a zajt, ami megfelelt a várakozásnak. Ennek köszönhetően a módszer alkalmazásával a zajra érzékeny DFT-vel számított spektrumtól eltérő, jelentős zajelnyomási képességet mutató eredményhez jutottunk. (A vizsgálatok eredményei legalább egy nagyságrend javulást mutatnak az S-IRLS-FT alkalmazása esetén.) Az S-IRLS-FT egyetlen hátránya lehet az LSQ-FT-hez képest az iterációs algoritmus nagyobb processzor időigénye. A fejezetben elért eredményeket a második tézisben foglalom össze, ezen belül két altézist fogalmazok meg.

#### 2. tézis

„A mért és számított adatok eltérésvektorának súlyozott normáját minimalizálva bevezettem a skálázott Hermite függvényekkel diszkrétizált S-IRLS-FT robusztus inverziós alapú Fourier transzformációs eljárást.

- a.) Az eljárás során a Leggyakoribb érték módszerével adott (és értekezéseimben, valamint publikációimban Steiner-súlyoknak nevezett) súlymátrix elemekkel dolgoztam, amelyek alkalmazása azért előnyös, mert az  $\varepsilon^2$

skálaparamétereket közvetlenül a mérési adatrendszerből - egy belső iterációs eljárásban - származtatjuk le.

- b.) Az S-IRLS-FT eljárás hatékonyságát Cauchy zajjal terhelt adatrendszer felhasználásával teszteltem és megállapítottam, hogy az eljárás Cauchy-eloszlást követő zaj esetében kiváló eredményt szolgáltat. Ebből kifolyólag a hagyományos DFT-hez képest is figyelemre méltó (esetenként egy nagyságrendet is elérő) zajelnyomást tanúsít.”

## 6. Inverziós alapú kétdimenziós Fourier transzformáció

Az egydimenziós inverziós alapú Fourier transzformációt általánosíthatjuk kétdimenziós esetre is. Ekkor különösen fontos a skálázott Hermite függvények korábban bemutatott sajátos tulajdonságának használata (miszerint azok a Fourier transzformáció sajátfüggvényei), hiszen így a 2D algoritmus futási ideje nagyságrendekkel csökkenthető.

Valamely kétváltozós  $u(x, y)$  függvény 2D Fourier transzformáltját

$$U(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy \quad (6.1.)$$

integrállal számítjuk, melynek inverzét az

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y \quad (6.2.)$$

kifejezés adja, ahol  $x, y$  a tér koordinátákat,  $U(\omega_x, \omega_y)$  a 2D tér-frekvencia spektrumot és  $\omega_x, \omega_y$  a tér frekvenciákat (pontosabban: tér-körfrekvenciák) jelöli. Az inverziós Fourier transzformáció algoritmusának meghatározásában a 4. fejezetben bevezetett eljárást követjük, azaz a direkt probléma (6.2.) kifejezésében a spektrumot skálázott Hermite függvények szerinti sorfejtéssel diszkrétizáljuk

$$U(\omega_x, \omega_y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{n,m} H_n(\omega_x, \alpha) H_m(\omega_y, \beta), \quad (6.3.)$$

ahol  $B_{n,m}$  sorfejtési együtthatók és (4.2.3.1.), ill. (4.2.3.4.) egyenletekhez hasonlóan

$$H_n(\omega_x, \alpha) = \frac{e^{-\frac{\alpha \omega_x^2}{2}} h_n(\omega_x, \alpha)}{\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} n! (2\alpha)^n}}, \quad h_n(\omega_x, \alpha) = (-1)^n e^{\alpha \omega_x^2} \left( \frac{d}{d\omega_x} \right)^n e^{-\alpha \omega_x^2},$$

$$H_m(\omega_y, \beta) = \frac{e^{-\frac{\alpha \omega_y^2}{2}} h_m(\omega_y, \beta)}{\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} m! (2\beta)^m}}, \quad h_m(\omega_y, \beta) = (-1)^m e^{\alpha \omega_y^2} \left( \frac{d}{d\omega_y} \right)^m e^{-\alpha \omega_y^2}.$$

A direkt feladatot az  $x_k, y_l$  pontban ( $k=1, \dots, K$ , és  $l=1, \dots, L$ , ahol  $K$  és  $L$  az adatok maximális száma  $x$ -, ill.  $y$ - irányban)

$$u(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{n,m} H_n(\omega_x, \alpha) H_m(\omega_y, \beta) e^{j(\omega_x x_k + \omega_y y_l)} d\omega_x d\omega_y,$$

vagy a  $G_{k,l}^{n,m}$  (negyedrendű) Jacobi-mátrix bevezetésével az

$$u(x_k, y_l) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{n,m} G_{k,l}^{n,m} \quad (6.4)$$

alakban írhatjuk. A Jacobi-mátrix részletesebben is megadható

$$\begin{aligned} G_{k,l}^{n,m} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\omega_x, \alpha) H_m(\omega_y, \beta) e^{j(\omega_x x_k + \omega_y y_l)} d\omega_x d\omega_y = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\omega_x, \alpha) e^{j\omega_x x_k} d\omega_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(\omega_y, \beta) e^{j\omega_y y_l} d\omega_y. \end{aligned} \quad (6.5)$$

A (4.2.3.9.)-hez hasonlóan felírható

$$H_n(\omega_x, \alpha) = \sqrt[4]{\alpha} H_n^{(0)}(\sqrt{\alpha}\omega_x), H_m(\omega_y, \beta) = \sqrt[4]{\beta} H_m^{(0)}(\sqrt{\beta}\omega_y), \quad (6.6)$$

és ezzel a Jacobi-mátrix a következő alakot ölti

$$G_{k,l}^{n,m} = \frac{\sqrt[4]{\alpha\beta}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(0)}(\sqrt{\alpha}\omega_x) e^{j\omega_x x_k} d\omega_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(0)}(\sqrt{\beta}\omega_y) e^{j\omega_y y_l} d\omega_y,$$

amit az  $\omega_x x_k = \omega_x' x_k'$ ,  $\omega_x' = \sqrt{\alpha}\omega_x$ ,  $x_k' = \frac{x_k}{\sqrt{\alpha}}$ ,  $\omega_y y_l = \omega_y' y_l'$ ,  $\omega_y' = \sqrt{\beta}\omega_y$ ,  $y_l' = \frac{y_l}{\sqrt{\beta}}$

jelölések bevezetésével a

$$G_{k,l}^{n,m} = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\beta}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(0)}(\omega_x') e^{j\omega_x' x_k'} d\omega_x' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(0)}(\omega_y') e^{j\omega_y' y_l'} d\omega_y',$$

vagy másként

$$G_{k,l}^{n,m} = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\beta}} \mathcal{F}^{-1}\{H_n^{(0)}(\omega_x')\} \mathcal{F}^{-1}\{H_m^{(0)}(\omega_y')\}$$

alakban írhatunk. Az alap értelmezésű (skálázatlan) Hermite függvények (4.2.2.6.) tulajdonságát felhasználva a Jacobi-mátrix újra írható egyszerűbb, integrálást nem igénylő formában

$$G_{k,l}^{n,m} = \frac{(j)^{n+m}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}} H_n^{(0)}(x_k') H_m^{(0)}(y_l'),$$

illetve

$$G_{k,l}^{n,m} = \frac{(j)^{n+m}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}} H_n^{(0)}\left(\frac{x_k}{\sqrt{\alpha}}\right) H_m^{(0)}\left(\frac{y_l}{\sqrt{\beta}}\right). \quad (6.7.)$$

Ezzel a (6.4.) direkt feladat megoldása gyorsan előállítható. További egyszerűsítésre is mód van, ha az adatainkat a két indexes (mátrix) írásmód helyett egy indexes (vektor) azonosítással kezeljük, azaz bevezetjük az  $s = k + (l-1)K$  indexet, amivel

$$u(x_k, y_l) = u_{k,l} = u_s.$$

Hasonlóan átalakíthatjuk a  $B_{n,m}$  együttható mátrixot  $B_i$  együttható vektorra az  $i = n + (m-1)N$  index bevezetésével. Ezáltal (6.4.) így írható

$$u_s = \sum_{i=1}^I B_i G_{s,i}, \quad (i = 1, \dots, I, \quad s = 1, \dots, S), \quad (6.8.)$$

ahol  $I = N + (M-1)N = NM$  a sorfejtési együtthatók,  $S = K + (L-1)N = KL$  az adatok maximális száma. Ezután a mért és számított adatok eltérését egyszerűen számíthatjuk

$$e_s = u_s^{(\text{mért})} - \sum_{i=1}^I B_i G_{s,i}. \quad (6.9.)$$

### 6.1. A 2D-LSQ-FT algoritmus

A fentiek szerint a direkt feladatban szereplő Jacobi-mátrix elemeit kétváltozós függvény esetén is egyszerűen és gyorsan előállíthatjuk (6.9.) segítségével, így a 2D Fourier transzformáció, mint túlhatározott inverz feladat megfogalmazható. A mért és a számított adatok vektora közötti eltérés ismeretében a legkisebb négyzetek módszerét az  $L_2$ -norma választása mellett az

$$E_2 = \sum_{k=1}^N e_k^2 = \sum_{k=1}^N (u_k^{(\text{mért})} - u_k^{(\text{számított})})^2 = \sum_{k=1}^N (u_k^{(\text{mért})} - \sum_{n=1}^M B_n G_{kn})^2 \quad (6.1.1.)$$

célfüggvény minimumával definiáljuk, ahol a Jacobi-mátrix elemeit (6.7.) alapján állítottuk elő. Ekkor a Gauss-féle legkisebb négyzetek (LSQ) módszerének normálegyenlet rendszeréhez jutunk

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \underline{\underline{\mathbf{G}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \underline{\underline{\mathbf{u}}}^{(\text{mért})}. \quad (6.1.2.)$$

A normál egyenletrendszer megoldásával

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = (\underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \underline{\underline{\mathbf{G}}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \underline{\underline{\mathbf{u}}}^{(\text{mért})}$$

a modellparaméter értékek ( $B_i$  sorfejtési együtthatók,  $i=1, \dots, NM$ ) előállíthatók és a 2D spektrum (6.3.)-nak megfelelően felírható

$$U(\omega_x, \omega_y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_i H_n(\omega_x, \alpha) H_m(\omega_y, \beta),$$

ahol  $i = n + (m-1)N$ . Ezzel a 2D-LSQ-FT inverziós Fourier transzformációs eljárás algoritmusát előállt. A spektrum ismeretében az inverz Fourier transzformált előállítható, amely a (kiindulásként használt, a direkt feladat megoldását jelentő) számított adatok (6.8.) szerint adott vektora

$$u_s = \sum_{i=1}^I B_i G_{s,i}, \quad (i = 1, \dots, I = MN, \quad s = 1, \dots, S = KL).$$

Az eljárást programszerűen Matlab nyelven valósítottam meg, numerikus viselkedését a 7.2. fejezetben mutatom be.

## 6.2. Algoritmus a Steiner-súlyokkal definiált IRLS módszer alkalmazása esetén (2D-S-IRLS-FT)

Az előzőekben kiugró adatokkal (outlierek) szemben sikeresen alkalmazható eljárásként ismertük meg az iteratív újrasúlyozás módszerének Steiner-súlyokkal való kombinálását. A minimalizálandó függvény ekkor az eltérések súlyozott normája

$$E_w = \sum_{k=1}^N W_{kk} e_k^2, \quad (6.2.1.)$$

amelyben a diagonális súlymátrix elemeiként a Leggyakoribb érték módszer keretében számított Steiner-súlyokat, valamint az eltérésvektor elemeit

$$e_k = u_k^{(mért)} - u_k^{(számított)}$$

szerepeltetjük. A 2D adatrendszer robusztus Fourier transzformációjára alkalmas algoritmus felépítésében hasonlóan járhatunk el, figyelembe véve, hogy (6.2.1.)-ben (6.9.)-nek megfelelően

$$e_k = u_k^{(mért)} - \sum_{i=1}^I B_i G_{k,i},$$

ahol  $G_{k,i}$  a (6.7.) egyenlet alapján megfelelő indexcserével állítható elő. Emellett ügyelnünk kell arra, hogy az  $e_k$  eltérések a súlymátrixban is szerepelnek

$$W_{kk} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + e_k^2}$$

azaz a (6.2.1.) minimalizálandó mennyiség nem kvadratikus, a minimum helyet nemlineáris egyenletrendszer határozza meg. Amint az egydimenziós IRLS-FT eljárásban, jelen esetben is az iteratív újrasúlyozás módszerét kell alkalmazni, azaz az IRLS eljárás 0. iterációs lépésében a Gauss-féle legkisebb négyzetek módszerével oldjuk meg a problémát

$$\underline{\underline{B}}^{(0)} = (\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}})^{-1} \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{u}}^{(mért)}.$$

Ezekkel a sorfejtési együtthatókkal előállíthatjuk a számított adatok egy közelítését

$$u_k^{(0)} = \sum_{n=1}^M B_n^{(0)} G_{k,n},$$

és felírhatjuk az eltérés vektor közelítő elemeit

$$e_k^{(0)} = u_k^{(mért)} - \sum_{n=1}^M B_n^{(0)} G_{k,n},$$

amikkel a súlyokat a

$$W_{kk}^{(0)} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (e_k^{(0)})^2}.$$

formula szerint számíthatjuk. Az első iterációban a hibafüggvényt így közelítjük

$$E_w^{(1)} = \sum_{k=1}^N W_{kk}^{(0)} e_k^2,$$

amely kifejezés most már kvadratikus (a súlyok az előző iterációból származó, a jelen iteráció ismeretlenjeit nem tartalmazó konstansok) és minimalizálása a súlyozott legkisebb négyzetek módszerének megfelelő inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet, melynek megoldását ismét csak az eltérések, illetve a súlymátrix újabb közelítésének számítására használjuk. Az IRLS eljárás  $q$ -ik lépésében kapott normálegyenlet rendszer megoldása

$$\bar{B}^{(q)} = (\underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{W}}^{(q-1)} \underline{\mathbf{G}})^{-1} \underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{W}}^{(q-1)} \bar{u}^{(mért)},$$

amellyel számított eltérések

$$e_k^{(q)} = u_k^{(mért)} - \sum_{n=1}^M B_n^{(q)} G_{k,n},$$

ill. az új Steiner-súlyok

$$W_{kk}^{(q)} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (e_k^{(q)})^2}.$$

Az így definiált 2D-IRLS-FT iterációs eljárás valamely alkalmasan választott stopkritérium teljesüléséig folytatható, megoldásként az utoljára kapott sorfejtési együtthatókat fogadjuk el. Ezekkel a spektrumot

$$U(\omega_x, \omega_y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_i H_n(\omega_x, \alpha) H_m(\omega_y, \beta)$$

alakban állíthatjuk elő, ahol  $i = n + (m-1)N$ . A spektrum ismeretében az inverz Fourier transzformált előállítható, amely a (kiindulásként használt, a direkt feladat megoldását jelentő) számított adatok (6.8.) szerint adott vektora

$$u_s = \sum_{i=1}^I B_i G_{s,i}, \quad (i = 1, \dots, I = MN, \quad s = 1, \dots, S = KL).$$

Az eljárást programszerűen Matlab nyelven valósítottam meg, numerikus viselkedését a 7.2.1. fejezetben mutatom be.

### 6.3. Az eredmények összefoglalása

Az értekezés jelen fejezetében az egydimenziós Fourier transzformációra támaszkodva kidolgoztam az inverziós alapú 2D Fourier transzformáció módszerét és Matlab rendszerben kifejlesztettem annak programjait (2D-LSQ-FT, 2D-S-IRLS-FT). A fejezetben elért eredményeket a harmadik tézisben foglalom össze, ezen belül két altézist adok meg.

#### 3. tézis

„A frekvenciaspektrum diszkretizációjára a skálázott Hermite függvényeket alkalmazva kidolgoztam az inverziós alapú 2D Fourier transzformációs eljárást. Megadtam a Jacobi-mátrix és ezzel a direkt probléma megoldásának gyors előállítására alkalmas lineáris explicit formulát.

- a.) A mért és számított adatok eltérésvektorának  $L_2$ -norma szerinti minimalizálásával bevezettem a skálázott Hermite függvényekkel diszkretizált 2D-LSQ-FT inverziós alapú Fourier transzformációs eljárást.
- b.) A mért és számított adatok eltérésvektorának súlyozott normáját minimalizálva bevezettem a skálázott Hermite függvényekkel diszkretizált és Steiner-súlyokkal definiált 2D-S-IRLS-FT robusztus inverzió alapuló Fourier transzformációs eljárást.”

## 7. Alkalmazások

Ebben a fejezetben az 1D és 2D inverziós Fourier transzformáció alkalmazási lehetőségeire mutatok be néhány példát.

### 7.1. Egydimenziós alkalmazás

Az inverziós Fourier transzformáció egydimenziós alkalmazására egy szeizmikus példát választottam. Ismeretes, hogy a Hilbert transzformáció a szeizmikus adatfeldolgozásban és értelmezésben fontos segédeszközként használható. A művelet szokásos alkalmazásában szükséges az időtartomány és a frekvenciatartomány közötti oda-vissza transzformálás, azaz a Fourier transzformáció, ill. az inverz Fourier transzformáció végrehajtása. A korábbiakban igazoltuk, hogy az inverziós Fourier transzformációs eljárások (LSQ-FT, S-IRLS-FT) a DFT-nél sokkal jobb zajelnyomással állítják elő a spektrumot. Ebből kiindulva indokolt megvizsgálni, hogy ez a tulajdonság hoz-e javulást a Hilbert transzformált, ill. annak alkalmazásával előállított első szeizmikus attribútum, a reflexióerősség zajérzékenységében.

#### 7.1.1. Hilbert transzformált előállítása inverziós alapú robusztus Fourier transzformációval

Az értekezés 5. fejezetében bemutatott új robusztus, inverziós alapon felépített Fourier transzformációs eljárás már bizonyította, hogy a kiugró zajok (outlierek) elnyomásában is hatékonyan működik és a jel/zaj viszonyt akár egy nagyságrenddel is képes megjavítani (Szegedi és Dobróka 2012). Ezen okból kifolyólag a geofizikai alkalmazásokon túl számos jelentős műszaki területen (pl. képfeldolgozásban) is alkalmazhatóvá válik. Ezért érdemesnek tartottam megvizsgálni a szeizmikus adatfeldolgozás területén is az algoritmus hatékonyságát, így kidolgoztam az inverziós Hilbert transzformációs eljárást, melynek segítségével a szeizmikus attribútumok alapját képező analitikus jelet definiálhatjuk, ill. képezhetők a szeizmikus attribútum szelvények robusztusan csökkent zajérzékenységgel (Szegedi és Dobróka 2014).

Az attribútum szelvények fontos szerepet töltenek be a szeizmikus adatfeldolgozásban és értelmezésben, hiszen ismeretük által lehetőségünk adódik bizonyos információk (fizikai- vagy geometriai paraméterek) kiemelésére. Taner et al. (1979) megjelent úttörő cikke óta a tématerület kiszélesedett és jelentős fejlődésen ment át. Ma az attribútumok széles

választékáról beszélhetünk, ezeket feloszthatjuk fizikai és geometriai attribútumokra, osztályozhatjuk az eljárásokat aszerint, hogy összegzés előtt vagy után nyernek alkalmazást, egy- vagy több szeizmikus csatornán vannak értelmezve stb. A mérési és adatfeldolgozási eljárások fejlesztése és alkalmazása során fontos feladat a jel/zaj viszony kezelése, lehetőség szerinti javítása. Az attribútum szelvények létrehozásában gyakran kap kiemelt szerepet a Fourier transzformáció. Az alapvető attribútum szelvények számításában a kiinduló pont az analitikus jel (analitikus vagy komplex csatorna) létrehozása, melynek fogalmát az adatfeldolgozásban Gábor Dénes Nobel-díjas magyar fizikus vezette be (Gábor 1946). Törekvése az volt, hogy a jelfeldolgozásban is alkalmazhatóak legyenek a kvantummechanika hatékony matematikai eszközei (mint pl. a Hilbert-tér, négyzetesen integrálható komplex függvények stb.). Ennek érdekében az

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (7.1.1.1.)$$

alakú időfüggvényt komplex jellé egészítette ki

$$s(t) = u(t) + jv(t), \quad (7.1.1.2.)$$

ahol  $t$  jelöli az időt,  $\omega$  a körfrekvenciát és  $j$  a képzetes egységet. A  $v(t)$  függvényt úgy definiálta, hogy a (7.1.1.1.) kifejezésben a  $\cos$  függvény helyére  $\sin$ , a  $\sin$  függvény helyére pedig  $-\cos$  függvényt írt, ezáltal előállítva a függvény kvadratúráját

$$v(t) = a \sin(\omega t) - b \cos(\omega t).$$

A (7.1.1.2.) kifejezés így az

$$s(t) = (a - jb) \exp(j\omega t)$$

alakot ölti, amely egy komplex forgó vektorként ábrázolható. Ezt az eljárást általánosítva Gábor egy tetszőleges  $u(t)$  időjel Fourier transzformációs előállításában ( $\sin$  és  $\cos$  függvények cseréjével) a

$$v(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \quad (7.1.1.3.)$$

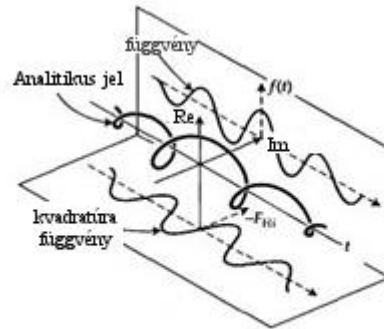
eredményre jutott, ami az  $u(t)$  időjel Hilbert transzformáltja

$$v(t) = u_H(t).$$

Az adatfeldolgozásban tehát az analitikus jelet a (7.1.1.4.)

$$s(t) = u(t) + ju_H(t) \quad (7.1.1.4.)$$

formulával állítjuk elő. A 13. ábra szemlélteti a komplex analitikus jel szerepét.



13. ábra: A komplex analitikus jel szemléltetése

A (7.1.1.3.) egyenlet szerint a Hilbert transzformáltat előállíthatjuk az  $u(t)$  és a  $-\frac{1}{\pi t}$  időfüggvények konvolúciójaként. Mint ismeretes a frekvenciatartományban ez a kapcsolat az

$$\mathcal{F}\{u_H(t)\} = \mathcal{F}\{u(t)\} \mathcal{F}\left\{-\frac{1}{\pi t}\right\} \quad (7.1.1.5.)$$

alakban írható, ahol  $\mathcal{F}$  a Fourier transzformációt jelöli. Mivel az  $\mathcal{F}\left\{-\frac{1}{\pi t}\right\} = -j \operatorname{sgn}(\omega)$ ,

bevezetve az  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$  jelölést

$$\mathcal{F}\{u_H(t)\} = -j \operatorname{sgn}(\omega) U(\omega) = U_H(\omega). \quad (7.1.1.6.)$$

A (7.1.1.6.)-ban a Hilbert transzformált jel  $U_H(\omega)$  spektruma a bevezetett módosítással hermitikus lesz, azaz az inverz Fourier transzformáció után  $u_H(t)$  valós jelet kapunk. Miután a (7.1.1.4.) szerinti analitikus jel ismert, az attribútumok előállíthatók.

A továbbiakban az első attribútum, más néven a reflexióerősség (pillanatnyi amplitúdó) zajérzékenységével foglalkoztam, ami a komplex csatorna

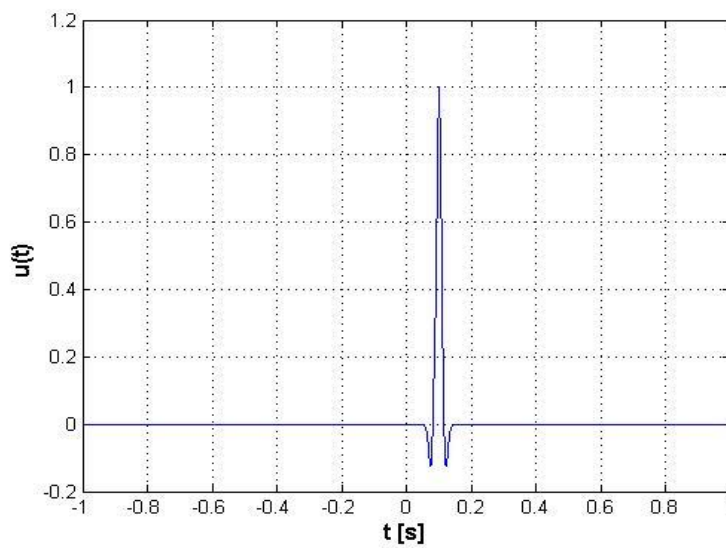
$$A(t) = \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}. \quad (7.1.1.7.)$$

abszolút értéke, és a 4. ábrán látható Ricker waveleten szemléltetem. Az idősor a  $[-1, 1]$  intervallumban  $0.005 \text{ sec}$  mintavételi közzel a  $0.1 \text{ sec}$ -nél lokalizált  $10 \text{ Hz}$ -es hullámcsomagot mutat. Az I. adatrendszer a mért adatsort  $\sigma=0.01$  szórású Gauss eloszlást követő zajjal terhelve állt elő. Kiugró hibákkal terhelt adatrendszert (II.) az  $\varepsilon=0.04$  skálaparaméterű Cauchy-eloszlást követő zaj generálásával hoztam létre. A 15-a), -b) és -c) ábrák a reflexióerősség szelvényét mutatják zajmentes, Gauss zajjal terhelt (I.), illetve Cauchy

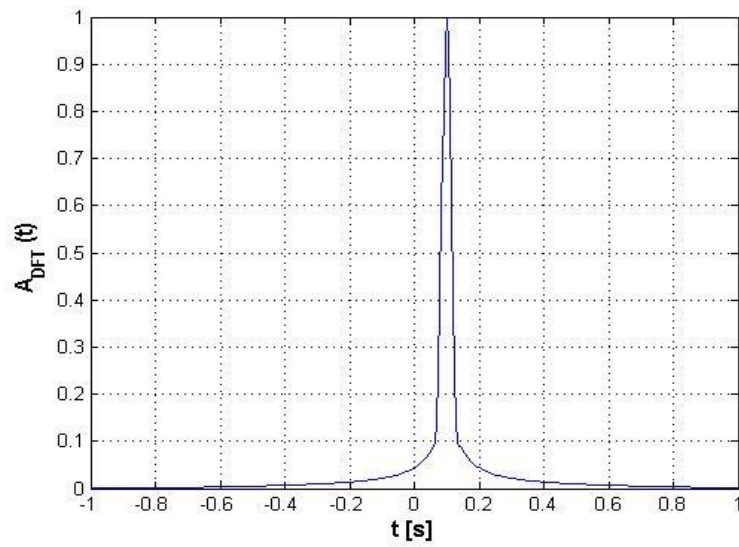
zajjal terhelt (II.) bemenő adatok esetén. A Hilbert transzformált előállítására a hagyományos Fourier transzformációs eljárást (DFT), illetve annak inverzét (IDFT) alkalmaztam. Látható, hogy a II. kiugró zajokat tartalmazó adatrendszer alapján kiszámított reflexióerősség szelvény különösen zajos. A zajérzékenység jellemzésére bevezetjük a

$$d = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (A^{(\text{zajos})}(t_k) - A^{(\text{zajmentes})}(t_k))^2} \quad (7.1.1.8.)$$

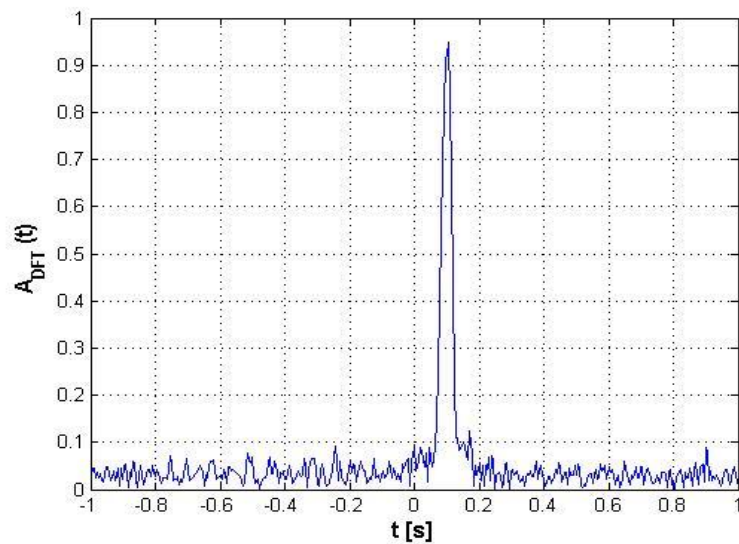
adattérbeli távolságot, amely az I. adatrendszer esetén  $d_{(I.)}=0.1346$ , a II. adatrendszer esetén pedig  $d_{(II.)}=0.0444$  értéket vesz fel.



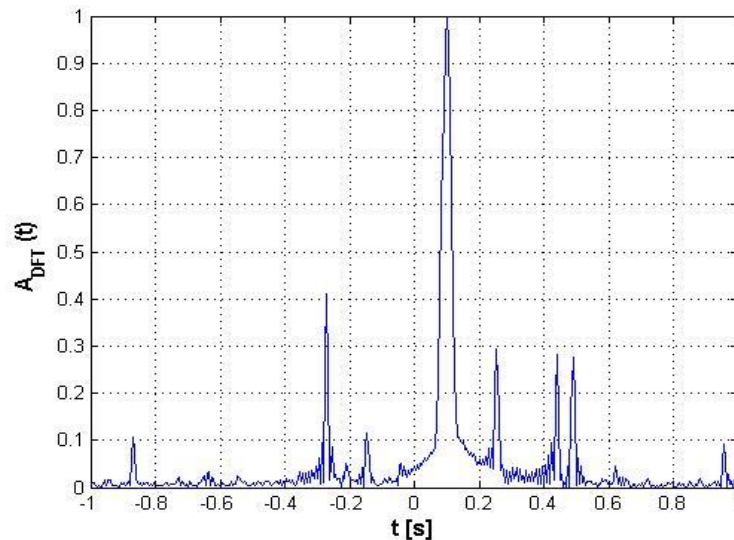
14. ábra: A zajmentes Ricker wavelet az időtartományban



15-a) ábra: DFT-vel számított reflexióerősség az időtartományban



15-b) ábra: DFT-vel számított reflexióerősség az I. adatrendszer esetén



15-c) ábra: DFT-vel számított reflexióerősség a II. adatrendszer esetén

A 15-c) ábra indokolja kiugró zajokkal szemben fokozottan a rezisztens Hilbert transzformációs eljárás kidolgozását. Mivel a fentiek szerint a Hilbert transzformált képzése a Fourier transzformáción alapul kézenfekvő, hogy a feladat megoldására a korábbi publikációinkban (Szegedi és Dobróka 2012) közölt Steiner-súlyokkal definiált inverziós alapú Fourier transzformációs eljárást (S-IRLS-FT) alkalmazzuk.

A Hilbert transzformált (7.1.1.6.) formula szerinti előállításához ismerni kell a jel frekvenciaspektrumát. A Fourier transzformációt - a jel/zaj viszony javítása érdekében - az S-IRLS-FT módszer alkalmazásával hajtjuk végre, ennek eredményeként megkapjuk a sorfejtési együtthatóknak azt a vektorát, amely minimalizálja a mért és (inverz Fourier transzformációval) számított adatok Steiner-súlyokkal számított súlyozott normáját. A sorfejtési együtthatók ismeretében tetszőleges frekvenciánál előállíthatjuk a komplex spektrumot. Példánkban a DFT-vel történt számításnak megfelelő frekvenciákon végeztük el a számítást. A továbbiak szempontjából lényeges, hogy a frekvencia pontok száma ezért megegyezik az adatok számával, ezáltal a Hilbert transzformált előállítására tett további lépések teljes mértékben megegyeznek a DFT-re alapozott hagyományos eljárás lépéseivel (különbség csupán abban van, hogy a spektrumot most S-IRLS-FT eljárással állítottuk elő). A spektrumot a Hilbert transzformált számítása végett szoroznunk kell a  $-j \operatorname{sgn}(\omega)$  függvénnyel. Az így kapott  $U^{(mért)}(\omega_k) = U_k^{(mért)}$  adatok lesznek az időtartományba visszavezető inverz Fourier transzformáció (spektrális) bemenő adatai. Az inverz Fourier transzformációt (a hagyományos eljárástól eltérően ismét) túlhatározott inverz feladatként

definiáljuk. (Ez lehetséges, mivel a frekvencia pontok száma megegyezik az adatok számával, az új sorfejtési együtthatók száma ennél kisebbé tehető.)

Az új inverz feladatban a bemenő („mérési”) adatok vektorát az előzőekben kapott spektrális adatok képezik, ezeket kell összehasonlítani a számított adatokkal

$$U_k^{(\text{számított})}(\omega) = U_k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_H(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

A 4. fejezetben a Fourier transzformációt kezeltük inverz feladatként, ezért a direkt probléma megoldásaként az inverz Fourier transzformáció (2.2.) kifejezését használhattuk.) Jelen esetben a direkt feladat a Fourier transzformáció fenti képletével adott, ahol az  $u_H(t)$  időfüggvényt sorfejtéses formában diszkrétizáljuk (7.1.1.9.) szerint

$$u_H(t) = \sum_{n=1}^M B_n \Psi_n(t). \quad (7.1.1.9.)$$

Behelyettesítés után a spektrum  $k$ -ik mintavételi elemére az alábbi formulát kapjuk

$$U_k(\omega) = \sum_{n=1}^M B_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t) e^{-j\omega_k t} dt = \sum_{n=1}^M B_n G_{kn}, \quad (7.1.1.10.)$$

ahol

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t) e^{-j\omega_k t} dt = \mathcal{F}_k \{ \Psi_n(t) \}, \quad (7.1.1.11.)$$

a Jacobi-mátrix, elemei a bázisfüggvény rendszer Fourier transzformáltjaiként is felfoghatók. A formulában szereplő komplex integrál kiszámítása elkerülhetővé válik, ha a (7.1.1.9.) sorfejtésben szereplő bázisfüggvényeket a Fourier transzformáció sajátfüggvényei közül választjuk meg, mert ekkor

$$\mathcal{F} \{ \Psi_n(t) \} = \lambda \Psi_n(\omega_k), \quad (7.1.1.12.)$$

ahol  $\lambda$  a sajátértéket jelöli.

Bázisfüggvénynek a skálázott Hermite függvényeket választottam. A skálázott Hermite-polinomok (4.2.3.2.) rekurziós formulája jelen esetben

$$h_{n+1}(t, \beta) = 2t\beta h_n(t, \beta) - 2n\beta h_{n-1}(t, \beta). \quad (7.1.1.13.)$$

Az Hermite-polinomok (4.2.3.3.) szerinti integrális tulajdonságát felhasználva

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} h_n(t, \beta) h_m(t, \beta) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} (2\beta)^n n! \delta_{nm}, \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}, \quad (7.1.1.14.)$$

ahol  $\beta$  a skálázó tényező és  $h_0^{(0)}(t, \beta) = 1$ ,  $h_1^{(0)}(t, \beta) = 2\beta t$  (Gröbner és Hoffreiter 1958). Így a skálázott Hermite függvények

$$H_n(t, \beta) = \frac{e^{-\beta t^2/2} h_n(t, \beta)}{\sqrt{\sqrt{\pi/\beta} n! (2\beta)^n}} \quad (7.1.1.15.)$$

szerint határozhatók meg és teljesül az

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(t, \beta) H_m(t, \beta) dt = \delta_{nm} \quad (7.1.1.16.)$$

ortogonalitási feltétel. A Jacobi-mátrixot a  $H_n(t, \beta)$  skálázott Hermite függvények felhasználásával (7.1.1.17.) szerint definiálhatjuk

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t, \beta) e^{j\omega_k t} dt. \quad (7.1.1.17.)$$

Belátható, hogy  $h_n(t, \beta) = \sqrt{\beta^n} h_n^{(0)}(t\sqrt{\beta})$  és  $H_n(t, \beta) = \sqrt[4]{\beta} H_n^{(0)}(t\sqrt{\beta})$ . Ezzel, valamint a  $t' = t\sqrt{\beta}$ ,  $\omega' = \omega/\sqrt{\beta}$  jelölések bevezetésével végül a

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt[4]{\beta}} \mathcal{F}_k \{H_n^{(0)}(t')\} = \frac{(-j)^n}{\sqrt[4]{\beta}} H_n^{(0)}\left(\frac{\omega_k}{\sqrt{\beta}}\right) \quad (7.1.1.18.)$$

Jacobi-mátrix gyorsan és integrálás nélkül számítható, a Fourier spektrum meghatározása ezek után már egyszerű. Bevezetve az

$$e_k = U_k^{(mért)} - U_k^{(számított)}$$

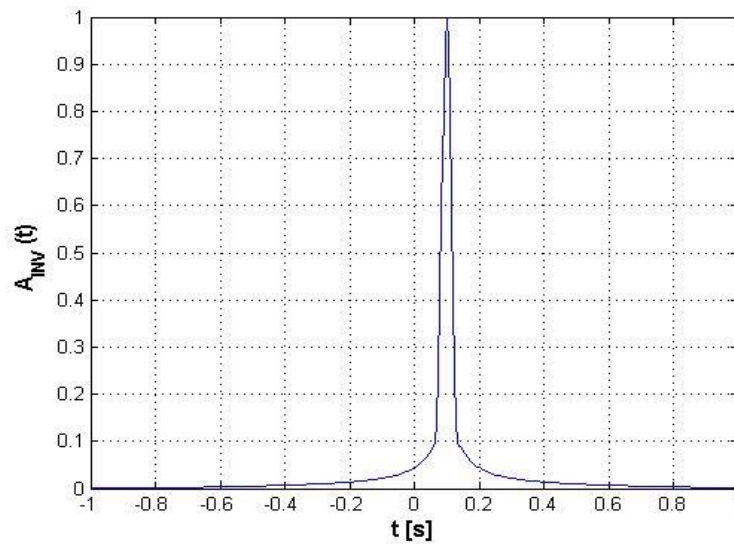
komplex vektort, ennek (valós) normanégyzetét, vagy súlyozott normanégyzetét minimalizálva jutunk az inverz feladat megoldására. Végül a Hilbert transzformált a sorfejtési együtthatók ismeretében (7.1.1.19.) alapján állítható elő az időtartományban

$$u_H(t) = \sum_{n=1}^M B_n \Psi_n(t), \quad (7.1.1.19.)$$

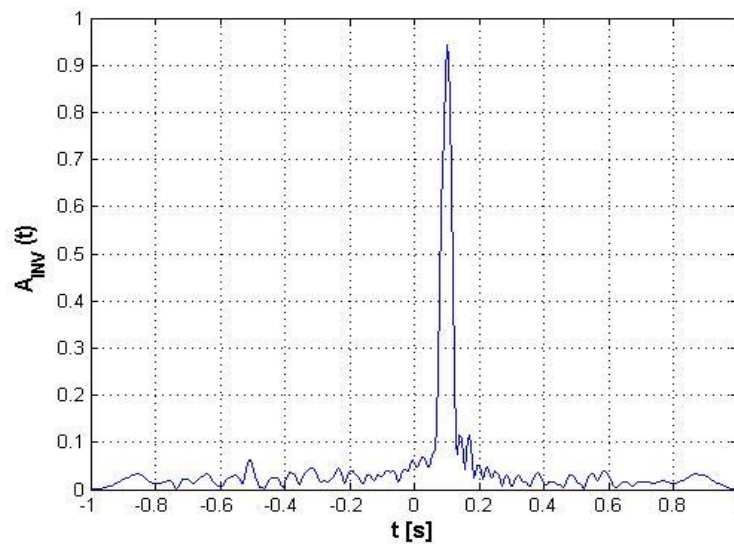
ahol  $\Psi_n(t)$  a (7.1.1.15.) skálázott Hermite függvényeket jelöli.

A továbbiakban vizsgáljuk meg a kidolgozott algoritmus hatékonyságát és pontosságát. A 16-a), -b) és -c) ábrákon az előzőekben bemutatott adatrendszer robusztus inverzióval számított Hilbert transzformáltjaival generált analitikus jel abszolút értékét szemléltetem. Természetesen a zajmentes bemenő jelre a módszer ugyanazt az eredményt szolgáltatja, mint a hagyományos DFT eljárással számított Fourier transzformációt felhasználó eljárás. Az I. bemenő adatrendszer (Gauss zaj) esetén az inverziós alapú Hilbert transzformált a 16-b) ábra tanúsága szerint hasonlóan zajos, mint a hagyományos módszerrel előállított 15-b) ábra. A kismértékű javulást az adattérben számított  $d_{(I)}=0.0794$  távolság jellemzi. Lényeges javulást tükröz azonban a II. adatrendszernek (Cauchy zaj) a Steiner-súlyokkal definiált robusztus inverziós módszerrel történt feldolgozása a 16-c) ábra szerint. Itt - a 15-c) ábrával

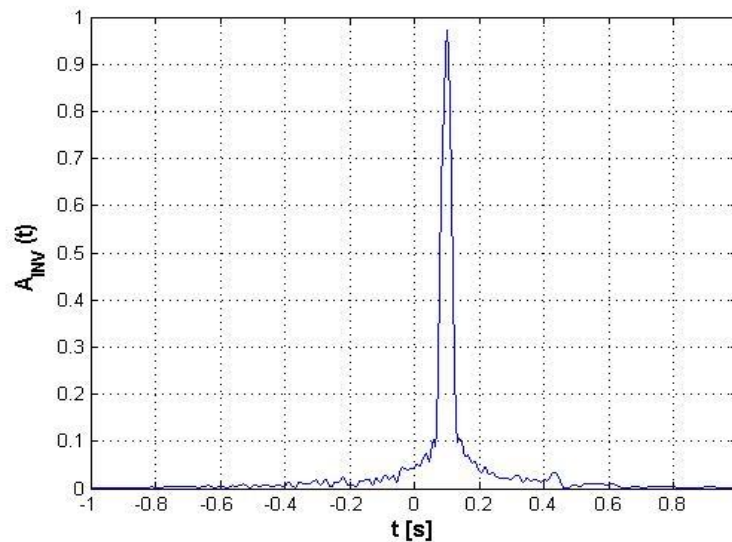
összehasonlítva - a kiugró adatok hatásának szinte teljes elnyomását tapasztalhatjuk, amelyet az adattérbeli távolság  $d_{(II)}=0.0036$  értéke is igazol. A hagyományos és az inverziós eljárással kapott adattérbeli távolságok között egy nagyságrend eltérés mutatkozik.



16-a) ábra: Az inverzióval számított reflexióerősség az időtartományban



16-b) ábra: Az inverzióval számított reflexióerősség az I. adatrendszer (Gauss zaj) esetén



16-c) ábra: Az inverzióval számított reflexióerősség a II. adatrendszer (Cauchy zaj) esetén

Noha a kettős inverzió a hagyományos DFT-IDFT transzformációhoz képest jelentős számítási idő többletet igényel, a fenti eredmények a jel/zaj viszony nagymértékű javulását igazolják. Véleményem szerint a mai számítógépek kapacitásának és gyorsaságának figyelembevételével egyes gyakorlati esetekben az említett számítási idő tolerálható.

### 7.1.2. Az eredmények összefoglalása

A mérési- és adatfeldolgozási eljárások fejlesztése és alkalmazása során fontos feladat a jel/zaj viszony kezelése, javításának szem előtt tartása. Az S-IRLS-FT eljárásról az előzőekben bizonyítottam, hogy a kiugró zajok elnyomásában hatékonyan működik és a jel/zaj viszonyt akár egy nagyságrenddel is képes megjavítani. Adódott a gondolat, hogy ezt a tulajdonságot a szeizmikus adatfeldolgozás területén is megvizsgáljam, így a jelen fejezetben az inverziós Fourier transzformációs eljárásra építve kidolgoztam a Hilbert transzformáció egy új előállítási módját, és erre alapozva a szeizmikus attribútum szelvények számításának új lehetőségét hoztam létre.

Az attribútum szelvények számításánál az első lépés az analitikus jel létrehozása, amelynek definiálása az adatfeldolgozásban Gábor Dénes Nobel díjas magyar fizikus nevéhez kötődik (Gábor 1946). Miután az analitikus jel ismert, az attribútumokat számítani tudjuk.

A Hilbert transzformált előállítása során a Fourier transzformációt az S-IRLS-FT módszer alkalmazásával végezzük el. Ezek után - a megfelelő átalakításokat elvégezve - inverz Fourier transzformációval jutunk vissza az időtartományba, amely túlhatározott inverz

feladatként fogalmazható meg. Jelen esetben a direkt feladat a (2.1. fejezetben adott) Fourier transzformáció, ahol az időfüggvényt sorfejtéses formában diszkrétizáljuk. Bázisfüggvényként a skálázott Hermite függvényeket alkalmaztam, mely esetében - speciális tulajdonságának (a Fourier transzformáció sajátfüggvényei) köszönhetően - elkerülhetővé válik a Jacobi-mátrix formulájában szereplő komplex integrál kiszámítása.

Megvizsgáltam a reflexióerősség (első attribútum) zajérzékenységét ezen algoritmus felhasználásával. Két adatrendszert állítottam elő: az I. adatrendszer a Gauss eloszlást követő zajjal terhelt, a II. adatrendszer a Cauchy zajjal terhelt Ricker wavelet adatokat tartalmazott. A teszt során a Hilbert transzformált előállítását egyrészt hagyományos módon DFT-vel, ill. annak inverzével történt. A reflexióerősség szelvény a II. adatrendszer esetében - nem meglepő módon - zajos viselkedést mutatott. Lényeges javulás észlelhető viszont a II. adatrendszeren S-IRLS-FT algoritmus alkalmazásával előállított reflexióerősség szelvényen, ahol a kiugró adatok hatásának szinte teljes elnyomását tapasztalhatjuk. A DFT és az S-IRLS-FT között számított adattérbeli távolságok egy nagyságrendbeli eltérést mutatnak, amelyek jelentős zajelnyomási képességről adnak tanúbizonyságot.

Az elért eredményeket a 4. tézisben foglalom össze, ezen belül két altézist állítok fel az alábbiak szerint.

#### 4. tézis

„Az inverziós Fourier transzformációs eljárásra építve a Hilbert transzformált előállításának új, robusztus módszerét adtam meg. Az eljárás keretében a Fourier transzformációt az S-IRLS-FT robusztus inverziós módszer Hermite függvényrendszeres diszkrétizációt használó változatának alkalmazásával állítottam elő. A Hilbert transzformált átviteli függvényével történt szorzás után a frekvenciatartományból az időtartományba történő visszatérés algoritmusaként bevezettem az inverz Fourier transzformáció előállításának robusztus inverzióra alapozott módszerét.

- a.) A robusztus Hilbert transzformációs eljárással az analitikus jel és ezzel a szeizmikus attribútumok robusztus előállítására nyílt lehetőség.
- b.) Az új eljárást alkalmaztam a reflexióerősség (első attribútum) számítására és zajérzékenység szempontjából - Gauss, ill. Cauchy zajjal terhelt adatrendszer felhasználásával - numerikus vizsgálatoknak vettem alá. Megállapítottam, hogy az eljárás a hagyományos (DFT-vel előállított) attribútumhoz képest jelentős zajelnyomó képességgel rendelkezik.”

## 7.2. Kétdimenziós alkalmazás

Az egydimenziós LSQ-FT és S-IRLS-FT eljárások zajjal szembeni hatékonyságát látva indokolt volt az inverziós alapú Fourier transzformáció 2D kiterjesztése annál is inkább, mivel a geofizikai gyakorlatban a felszíni (pl. gravitációs, mágneses stb.) mérések köztudottan 2D feldolgozási eljárást igényelnek. Az alábbiakban a mágneses adatok pólusra redukálása terén mutatok be egy alkalmazási lehetőséget.

### 7.2.1. 2D-S-IRLS-FT alkalmazása mágneses adatok pólusra redukálása esetén

Jelen fejezetben a 6.2.-ben kidolgozott kétdimenziós S-IRLS-FT algoritmust alkalmazom a mágneses geofizikai adatok pólusra redukálásában.

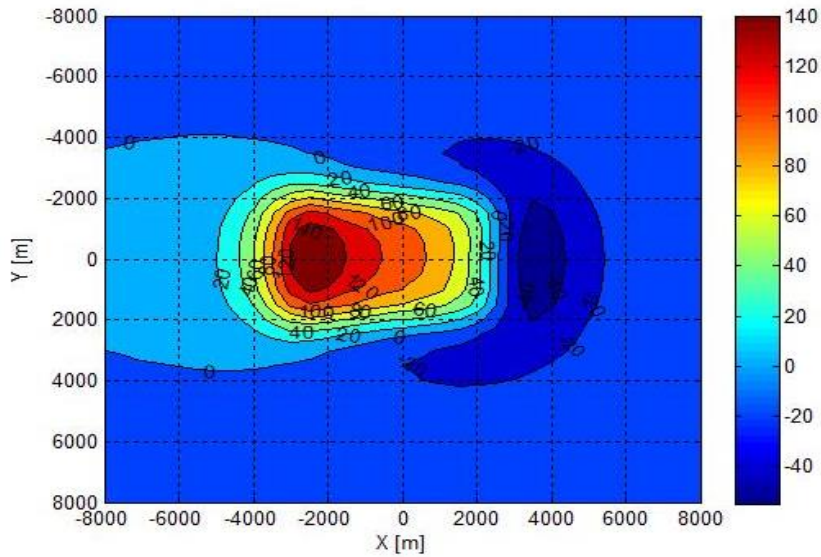
Matlab programnyelvben a 17-a) ábrán levő szintetikus adatrendszert generáltam, ahol is a mérési területet a felszínen az x- és y irányokban (-8000, 8000) m intervallumban adtam meg. A mintavételi távolság 500 méteres, a homogén környezetben elhelyezett prizmatikus ható koordinátáit a következők szerint vettem fel: x irányban (-3000, 3000) m, y irányban (-2000, 2000) m és z irányban (2000, 1000) m. A mágneses ható mágnesszete 100 nT, a deklináció mértéke  $D=2.5^\circ$ , az inklinációé  $I=63^\circ$ . A mért mágneses adatokat a felszínen Kunaratnam-módszerével számítom (17-a) ábra). (A számítást és a hagyományos DFT-re épített pólusra redukálást végző szoftvert dr. Szabó Norbert Péter egyetemi docens bocsátotta rendelkezésemre, amiért ezúton is köszönetemet fejezem ki.)

Két dimenzióban a pólusra redukálást a térfrekvenciák tartományában az

$$R(u, v) = T(u, v) S(u, v) \quad (7.2.1.1.)$$

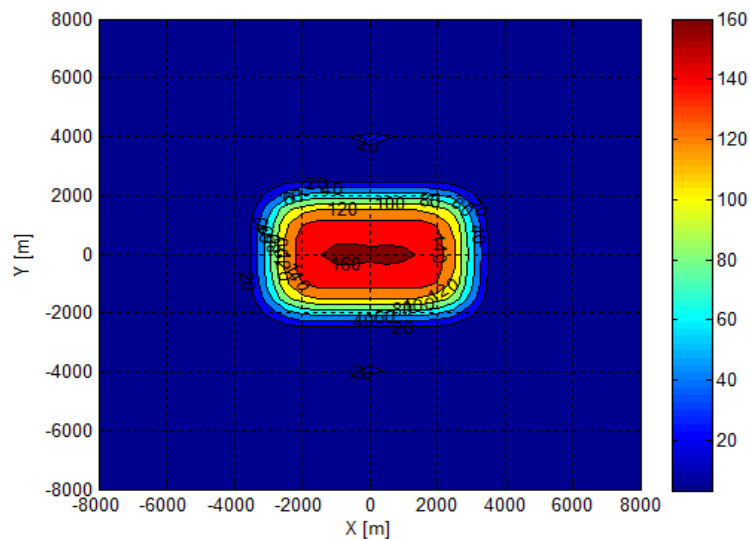
formula szerint végezzük, ahol  $(u, v)$  a térfrekvenciák,  $T(u, v)$  a mágneses adatok 2D Fourier transzformáltja,  $S(u, v)$  pedig a pólusra redukálás frekvencia tartománybeli operátora (komplex átviteli függvény). A pólusra redukált  $T^{(p)}(x, y)$  mágneses adatrendszert inverz Fourier transzformációval állítjuk elő

$$T^{(p)}(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{R(u, v)\}.$$



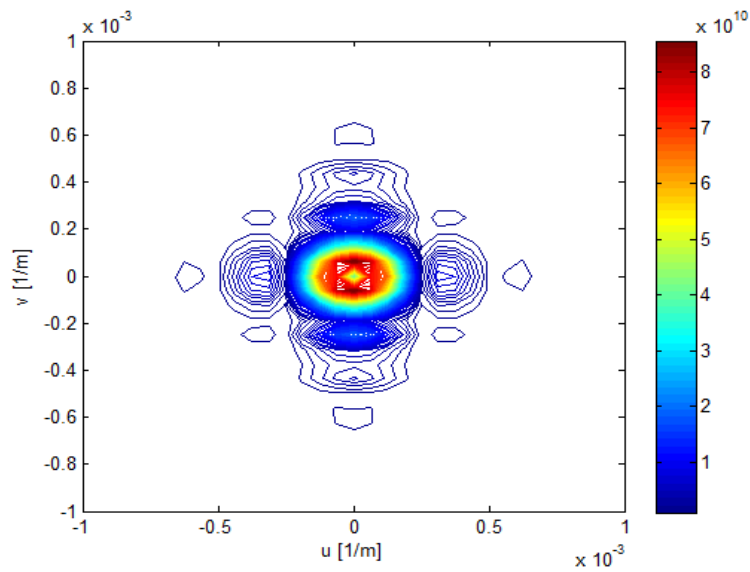
17-a) ábra: Mágneses térkép pólusra redukálás nélkül

A mért mágneses térképet átszámítjuk a mágneses pólusra ( $I=90^\circ$ ), így az anomáliák könnyebben értelmezhetők, ill. ekkor a görbe maximumok pontosan a ható felett jelentkeznek. A 17-b) ábrán a zajmentes mágneses adatok (hagyományos, DFT-re alapozott eljárással előállított) pólusra redukált térképét mutatom be.



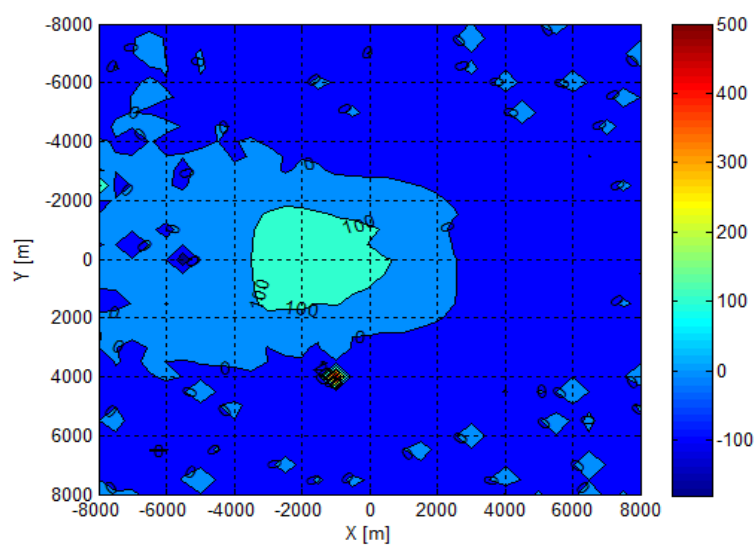
17-b) ábra: Pólusra redukált mágneses térkép

A DFT módszerrel kapott 2D Fourier spektrum abszolút értékét a  $[-1,1] \cdot 10^{-3}$  térfrekvencia határok közé transzformálva a 17-c) ábrán demonstrálom.

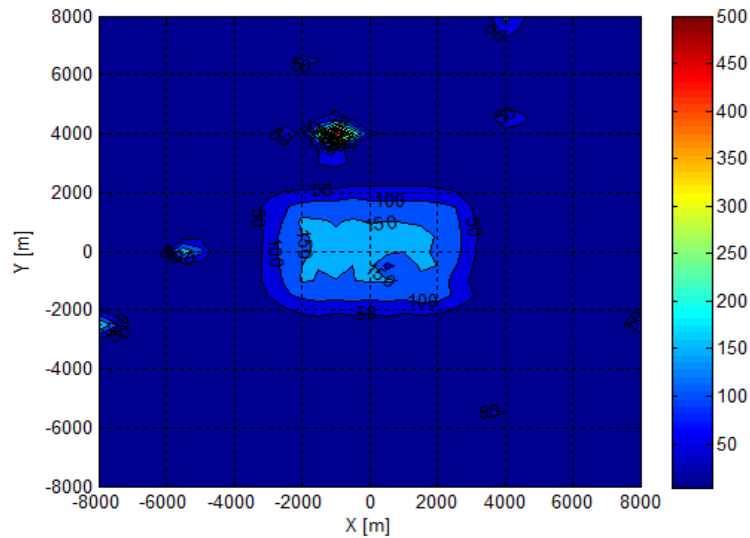


17-c) ábra: A mágneses adatok 2D Fourier spektruma

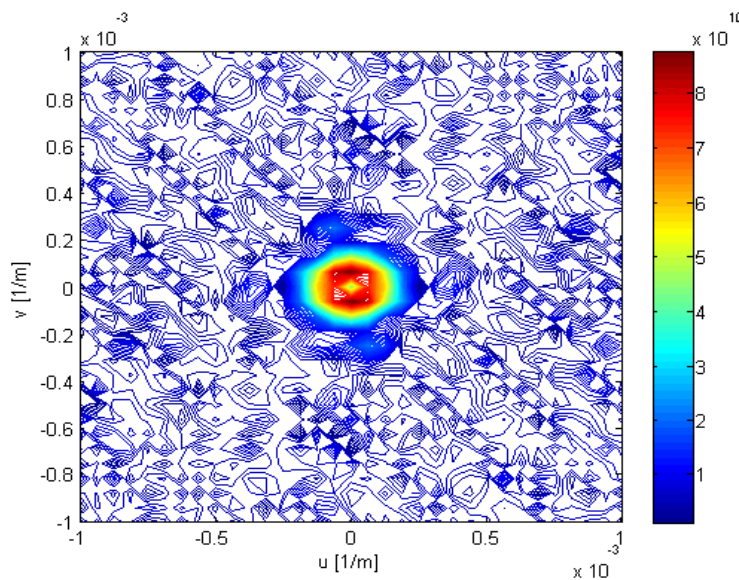
A fenti ábrák esetében zajmentes mágneses adatokkal dolgoztam. A következőkben a zajmentes adatokhoz Cauchy-eloszlású véletlen zajt adtam, így a 18-a), -b) és -c) ábrák adódtak. A zajos adatok pólusra redukálás nélküli térképét a 18-a) ábra, a pólusra redukált térképét a 18-b) ábra és a 2D Fourier spektrumot a 18-c) ábra szemlélteti. Látható, hogy Cauchy-eloszlású zaj esetében a pólusra redukált eredmény nagyon zajos, mely a hagyományos kétdimenziós DFT algoritmus jelentős zajérzékenységének következménye, ami a 17-c) és 18-c) ábrák összehasonlítása alapján nyilvánvaló.



18-a) ábra: Mágneses térkép pólusra redukálás nélkül Cauchy zaj esetén



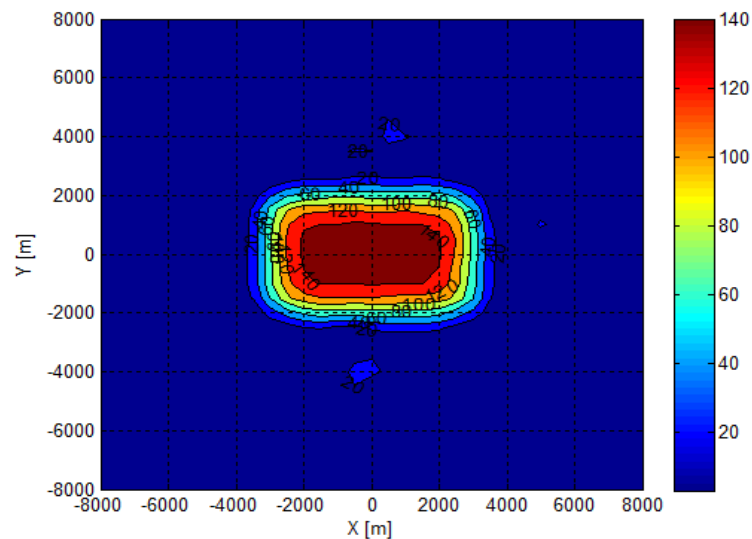
18-b) ábra: Pólusra redukált Cauchy zajos mágneses térkép



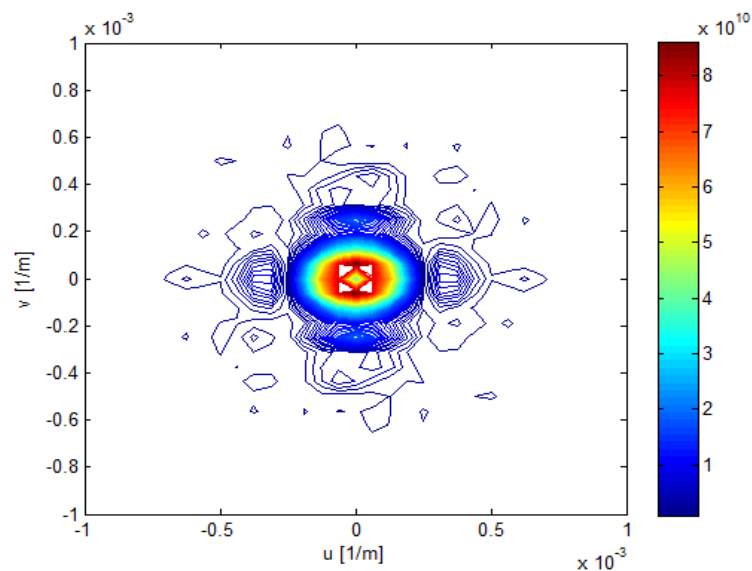
18-c) ábra: A mágneses adatok 2D Fourier spektruma

Kézenfekvő, hogy a 2D DFT eljárást a 6. fejezetben bemutatott inverziós alapú Fourier transzformációs módszerrel helyettesítsük. Mivel a bemenő mágneses adatrendszer Cauchy-eloszlást követő zajt hordoz, a pólusra redukálás javítására Fourier transzformációként a 2D-S-IRLS-FT eljárást alkalmazzuk. Az eljárás során a sorfejtési együtthatók ismeretében tetszőleges frekvencián számítható a frekvenciaspektrum, így annak érdekében, hogy az eredményünk a DFT-vel azonos térfrekvenciákon levő eredménnyel megegyező formába kerüljön a spektrumot a DFT térfrekvenciákon számítottuk. A 19-a) és b) ábrákon az új inverziós alapú 2D Fourier transzformációval kapott pólusra redukált képet és a 2D

térfrekvencia spektrumot szemléltetem. Az új algoritmus által kapott 19-b) ábrát összevetve a hagyományos kétdimenziós DFT eljárással (18-c) ábra) jelentős zajelnyomást tapasztalunk. Ennek megfelelően a pólusra redukált 19-a) mágneses térkép rendkívül jelentős zajelnyomást tanúsít, az eredmény térkép igen közel van a zajmentes adatrendszerből kapott 17-b) mágneses térképhez.



19-a) ábra: Az új 2D-S-IRLS-FT algoritmus a pólusra redukálás után



19-b) ábra: A térfrekvencia-tartománybeli zajos mágneses adatok

Az inverziós eredmények bizonyítják, hogy az inverziós alapú 2D-S-IRLS-FT algoritmus sikeresen alkalmazható a mágneses adatok pólusra redukálásában jelentős zajelnyomás mellett.

### **7.2.2. Az eredmények összefoglalása**

Jelen alfejezetben a 6.2.-ben kidolgozott 2D-S-IRLS-FT inverziós Fourier transzformációt alkalmazom a mágneses adatok pólusra redukálásában. Az elért eredményeket az 5. tézisben fogalmazom meg.

### **5. tézis**

„A 2D-S-IRLS-FT inverziós Fourier transzformáció mágneses adatok pólusra redukálására történt alkalmazása terén megállapítottam, hogy a módszer - a hagyományos, DFT-re alapozott eljáráshoz képest - igen jelentős zajelnyomó képességet mutat a térfrekvencia spektrum meghatározása során. Ez a robusztus 2D Fourier transzformációs eljárás a pólusra redukálás pontosságát kiemelkedően képes javítani.”

## 8. Összefoglalás

A mérnöki gyakorlatban a diszkrét időtartománybeli adatsorok feldolgozásának hagyományos eszközei a diszkrét Fourier transzformáció (DFT), ill. a gyors Fourier transzformáció (FFT). Ezek az algoritmusok a bemeneti időjel frekvenciaspektrumát nagy pontossággal képesek előállítani, amennyiben a mintavételi időközt és a regisztrálási időtartományt megfelelően választjuk meg. Mérési adataink azonban zajt hordoznak, ezért különösen fontos az alkalmazott műveletek zajelnyomó képességének vizsgálata. A Fourier transzformáció hagyományos formái (DFT, FFT) erősen zajérzékenyek, amit a mérési adatok feldolgozása terén a Fourier transzformáció megvalósítása előtt vagy után alkalmazott különböző zajszűrési technikák használatával igyekeznek kezelni.

A geofizikai inverziós gyakorlatban számos olyan módszer létezik, mely alkalmas lehet a zajelnyomásra. Ezek közül a hatékonyság szempontjából kiemelkednek a sorfejtéses diszkretizációt robusztus súlyokkal kombináló eljárások, melyek alkalmazása során jelentős zajcsökkentés és inverziós stabilitás valósul meg. Értekezésemben a zajos adatrendszerek frekvenciaspektrumának robusztus módszerekkel történő meghatározását tűztem ki célul, különösen ügyelve a zajelnyomás javítására. Ennek értelmében, a sorfejtéses inverziós eljárás adatfeldolgozásban való alkalmazásának lehetőségeit vizsgálva, a geofizikai inverzió eszköztárát használó Fourier transzformációs eljárást (Vass 2010) továbbfejlesztettem. A frekvenciaspektrum diszkretizálását sorfejtés formájában adtam meg, ami azt jelenti, hogy a folytonos komplex függvényt megfelelően választott függvényrendszer szerint fejtem ki. Mivel ekkor az inverz feladat Jacobi-mátrixa a bázisfüggvények inverz Fourier transzformáltjaként írható fel, olyan bázisfüggvények alkalmazását tűztem ki célul, amelyek az inverz Fourier transzformációnak sajátfüggvényei. Megmutattam, hogy ennek a kritériumnak a skálázott Hermite függvények felelnek meg, ezért bázisfüggvényként ezeket alkalmaztam és megadtam a Jacobi-mátrix elemeit előállító formulát, amelynek használatával az egydimenziós inverziós alapú Fourier transzformációt nem kell komplex integrálként kiszámítani, elegendő csak a sajátértékkel való szorzás. Ennek a felismerésnek az előnye az 1D és 2D inverziós Fourier transzformációs eljárások kidolgozása során a számítási idő csökkenésében mutatkozik meg.

A 4. fejezetben bemutattam a skálázatlan, ill. a skálázott Hermite függvényes diszkretizációra alapozott inverziós alapú Fourier transzformációs eljárás új változatát, amit numerikus vizsgálatoknak vettem alá. Az LSQ-FT eljárással kapott eredmények - Gauss-,

ill. Cauchy zajokkal terhelt idősor (I. és II. adatrendszerek) esetében is - azt mutatták, hogy a hagyományos DFT-vel előállított spektrumhoz képest az idő- és frekvenciatartományban egyaránt megvalósult a zajredukálás (igaz a II. adatrendszer esetén lényegesen gyengébb eredményt kaptunk, melynek magyarázata, hogy a legkisebb négyzetek módszerének elve Gauss-eloszlású adatsor alkalmazásakor ad optimális eredményt).

Ez indokolta a módszer továbbfejlesztését a robusztus inverzió irányába. Így az 5. fejezetben megadtam az új, Fourier transzformációs robusztus algoritmust (S-IRLS-FT), mely a Steiner professzor által a Leggyakoribb érték módszer keretében bevezetett - időközben Steiner-súlyok elnevezést kapott - súlymátrix elemeket alkalmazza. Az eljárás során vizsgálatokat végeztem a zajérzékenység szempontjából, relatív adat- és modelltérbeli távolságokat számoltam az inverziós eredmények minősítése végett. Az inverziós eredmények határozottan demonstrálják az S-IRLS-FT algoritmus kiugró adatokkal szemben mutatott rezisztenciáját. A számított távolságadatok (nagyságrenddel kisebb értékei) is igazolják a robusztus módszer hatékonyságát.

A 6. fejezetben bemutattam az inverziós alapú kétdimenziós Fourier transzformációs algoritmust LSQ (2D-LSQ-FT), ill. Steiner-súlyokkal definiált IRLS módszer (2D-S-IRLS-FT) alkalmazása esetén.

A 7.1. alfejezetben az S-IRLS-FT eljárást a szeizmikus adatfeldolgozás területén is vizsgáltam. Ennek érdekében új Hilbert transzformációs algoritmust dolgoztam ki, amelyet numerikusan teszteltem. Mint az előzőeknél, az inverziós eredmény itt is jelentős zajcsökkenésről ad tanúbizonyságot, ami az eljárás hatékonyságát jól tükrözi.

A kétdimenziós alkalmazások körében a mágneses adatok pólusra redukálása terén végeztem numerikus vizsgálatokat, melynek eredményei igazolták az inverziós Fourier transzformáció zajelnyomó képességének jelentős javulását. A vizsgálatok során tapasztalt javulás a gyakorlati alkalmazások szempontjából igen jelentős és fontos.

## **Köszönetnyilvánítás**

*Egy doktori disszertáció elkészítése nem kizárólag a szerző érdeme. Legnagyobb köszönettel és őszinte hálával tartozom témavezetőmnek, Dr. Dobróka Mihály Professzor úrnak, aki mellett doktoranduszként tanulhattam, majd tudományos segédmunkatársként az általa vezetett OTKA projektben dolgozhattam. Köszönöm neki, hogy kezdetben irányt mutatott tudományos érdeklődésemnek, majd doktori kutatásaim, illetve disszertációm elkészítése során mindvégig mederben tartotta gondolaimat. Emellett külön köszönöm, hogy oly sok hasznos szakmai tanáccsal látott el, jó szándékú, mindig a munkámat segítő kritikáit, új ötletekkel gazdagító észrevételeit, ösztönzéseit, a kutatási és publikációs lehetőségek, valamint a hazai és külföldi konferencia részvételi lehetőségek biztosítását.*

*Köszönetemet fejezem ki a Geofizikai Tanszéken oktató és doktorandusz hallgató kollégáimnak azért a nyugodt munkahelyi légkörért, melyet a kutatási munkám végzése során nyújtottak a számomra.*

*Szeretnék köszönetet mondani Férjem lelki támogatásáért, aki kiegyensúlyozott, nyugodt családi háttérrel biztosított a doktori munkám megírása során.*

*Végezetül hálásan köszönöm Édesanyámnak és Testvéreimnek, hogy személyes támogatásukkal és bátorításukkal hozzájárultak a doktori kutatásaim sikeres lefolytatásához és e disszertáció létrejöttéhez.*

**Irodalomjegyzék**

- Amundsen L., 1991: Comparison of the least-squares criterion and the Cauchy criterion in frequency-wavenumber inversion. *Geophysics*, 56, 2027–2038.
- Dobróka M., Gyulai Á., Ormos T., Csókás J., Dresen L., 1991: Joint inversion of seismic and geoelectric data recorded in an under-ground coal mine. *Geophysical Prospecting*, 39/5, 643-665, doi: 10.1111/j.1365-2478.1991.tb00334.x.
- Dobróka M., Szabó N. P., 2010: Sorfejtéses inverzió II. Mélyfúrési geofizikai adatok feldolgozása intervallum inverziós eljárással. *Magyar Geofizika*, 51/1, 25-42, ISSN 0025-0120.
- Dobróka M., Völgyesi L., 2010: Sorfejtéses inverzió IV. A nehézségi erőter potenciálfüggvényének inverziós előállítás. *Magyar Geofizika*, 51/3, 143-149, ISSN 0025-0120.
- Dobróka M., Szegedi H., Vass P., Turai E., 2012: Fourier transformation as inverse problem - an improved algorithm. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica* 47/2, 185-196, doi: 10.1556/AGeod.47.2012.2. <http://link.springer.com/article/10.1556/AGeod.47.2012.2.7>.
- Dobróka M., Szegedi H., 2014: On the Generalization of Seismic Tomography Algorithms. *American Journal of Computational Mathematics (AJCM)*, 4/1, 37-46, doi:10.4236/ajcm.2014.41004, <http://www.scirp.org/journal/AJCM/>
- Dobróka M., Szegedi H., Somogyi Molnár J., Szűcs P., 2014: On the Reduced Noise Sensitivity of a New Fourier Transformation Algorithm. *Mathematical Geosciences. Online First Articles: Papers* 11004-014-9570-x. <http://link.springer.com/article/10.1007/s11004-014-9570-x>
- Duoandikoetxea J., 1995: *Fourier Analysis. Graduate studies in Mathematics*, 29, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Gábor D., 1946: *Theory of communication. Part I. J. Inst. Elect. Eng.*, 93, 429–441.
- Gröbner W., Hoffreiter N., 1958: *Integraltafel. Zweiter Teil. Bestimmte Integrale*. Springer-Verlag, Wien und Innsbruck.
- Gyulai Á., Ormos T. 1999: A new procedure for the interpretation of VES data: 1.5-D simultaneous inversion method. *Journal of Applied Geophysics*, 41, 1-17.

- Gyulai Á., Ormos T., Dobróka M., 2010: Sorfejtéses inverzió V. Gyors 2D geoelektromos inverziós módszer. *Magyar Geofizika*, 51/4, 185-195, ISSN 0025-0120.
- Kis M., 1998: Felszínközeli földtani szerkezetek vizsgálata szeizmikus és egyenáramú geoelektromos adatok együttes inverziójával. PhD értekezés. Miskolci Egyetem.
- Kis M., 2002: Generalised Series Expansion (GSE) used in DC geoelectric-seismic joint inversion. *Journal of Applied Geophysics*, 50/4, 401-416.
- Menke W., 1984: *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. Academic Press.
- Ney da Silva J. A., de Campos M. L. R., 2006: Method for obtaining spectrally efficient orthogonal UWB pulse shapes. *Telecommunications symposium, 2006 International, Fortaleza, Ceara*, 46–51, ISBN 978-85-89748-04-9, doi: 10.1109/ITS.2006.4433240.
- Scales J. A., Gersztenkorn A., Treitel S., 1988: Fast Lp solution of large, sparse, linear systems: Application to seismic travel time tomography. *Journal of Comp. Phys.*, 75, 314–333.
- Steiner F., 1988: Most frequent value procedures (a short monograf). *Geophysical Transactions*, 34, 139–260.
- Steiner F., 1997: *Optimum methods in statistics*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Szabó N. P., 2004: Mélyfúrési geofizikai adatok értelmezésének modern inverziós módszerei. PhD értekezés, Miskolci Egyetem.
- Szegedi H., Dobróka M., 2012: Robusztus Fourier transzformáció Steiner-súlyok alkalmazásával. *Magyar Geofizika*, 53/1, 21-28, ISSN 0025-0120.
- Szegedi H., Dobróka M., 2014: Hilbert transzformált előállítás inverziós alapú robusztus Fourier transzformációval. *Magyar Geofizika*, 55/1, 21–29.
- Taner M. T., Koehler F., Sheriff R. E., 1979: Complex seismic trace analysis. *Geophysics* 44/6, 1041–1063.
- Turai E. 1981: GP time-domain görbék TAU-transzformációja. *Magyar Geofizika* XXXII/1, 29-36.
- Turai E., Dobróka M., Herczeg Á., 2010: Sorfejtéses inverzió III. Gerjesztett polarizációs adatok inverziós feldolgozása. *Magyar Geofizika*, 51/2, 88-98, ISSN 0025-0120.
- Vaidyanathan P. P., 2008: Eigenfunctions of the Fourier transform. *IETE Journal of Education*, 49/2, 51–58.

Vass P., Dobróka M., 2010: Sorfejtéses inverzió I. Fourier transzformáció, mint inverz feladat. Magyar Geofizika, 50/4, 141-152, ISSN 0025-0120.

Vass P., 2010: A Fourier transzformáció, mint inverz feladat. PhD értekezés. Miskolci Egyetem.

### A szerzőnek a témában megjelent publikációi

#### FOLYÓIRAT CIKKEK

- [1] Dobróka M., **Szegedi H.**, Somogyi Molnár J., Szűcs P. 2014. On the Reduced Noise Sensitivity of a New Fourier Transformation Algorithm. Mathematical Geosciences. Online First Articles: Papers 11004-014-9570-x, (**Impact factor: 1.713**)  
<http://link.springer.com/article/10.1007/s11004-014-9570-x>
- [2] Dobróka M., Szabó N. P., **Szegedi H.** 2014. Geofizikai információfeldolgozásmódszerek és alkalmazások. Miskolc: Milagrossa Kft., 4. CriticEl monográfia sorozat, ISBN 978-963-08-9325-1.
- [3] **Szegedi H.**, Dobróka M. 2014. On the use of Steiner's weights in inversion-based Fourier transformation - robustification of a previously published algorithm. Acta Geodaetica et Geophysica, 49/1, 95-104, Print ISSN 2213-5812, Online ISSN 2213-5820, DOI 10.1007/s40328-014-0041-0. (**Impact factor: 0.394**)  
<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs40328-014-0041-0>
- [4] Dobróka M., **Szegedi H.** 2014. On the Generalization of Seismic Tomography Algorithms. American Journal of Computational Mathematics (AJCM), 4/1, 37-46, DOI 10.4236/ajcm.2014.41004, <http://www.scirp.org/journal/AJCM/>
- [5] **Szegedi H.** 2014. Generating Hilbert transform with the use of inversion-based robust Fourier transform. Geosciences & Engineering - a publication of the University of Miskolc, 2/4, 102-115, ISSN 2063-6997.
- [6] **Szegedi H.**, Dobróka M. 2014. Hilbert-transzformált előállítás inverziós alapú robusztus Fourier-transzformációval. Magyar Geofizika, 55/1, 21-29.
- [7] **Szegedi H.**, Dobróka M., Bodoky T. 2013. New inversion algorithm for the computation of Fourier-transform -examination on a synthetic dataset. Geosciences & Engineering - a publication of the University of Miskolc, 2/3, 2013, 83-90, ISSN 2063-6997.

- [8] **Szegedi H.**, Dobróka M. 2012. Robusztus Fourier-transzformáció Steiner-súlyok alkalmazásával. Magyar Geofizika, 53/1, 21-28, ISSN 0025-0120.
- [9] Dobróka M., **Szegedi H.**, Vass P., Turai E. 2012. Fourier transformation as inverse problem - an improved algorithm. Acta Geodaetica et Geophysica, 47/2, 185-196, DOI 10.1556/AGeod.47.2012.2.7. (**Impact factor: 0.35**)  
<http://link.springer.com/article/10.1556/AGeod.47.2012.2.7>.

#### NEMZETKÖZI KONFERENCIÁK KIADVÁNYAI (EXTENDED ABSTRACTS)

- [1] Dobróka M., **Szegedi H.**, Somogyiné Molnár J. 2015. A New Inversion Based 2D Fourier Transformation Method and Its Use in Pole-reduction of Magnetic Data Set. 77<sup>th</sup> EAGE Conference & Exhibition 2015, Earth Science for Energy and Environment, Madrid, Spain, 2015.06.01-04 (2015. március 5-én elfogadva)
- [2] Dobróka M., **Szegedi H.**, Somogyiné Molnár J. 2014. A New Robust Inversion Method Using Cauchy-Steiner Weights - And Its Application in Data Processing. Near Surface Geoscience 2014 - 20<sup>th</sup> European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics, Athens, 2014.09.15-17.
- [3] Dobróka M., **Szegedi H.** 2013. Investigation of Robust Fourier-transform method in case of outliers. International Journal of Science, 6/25, 306-313, ISSN 2218-5348.
- [4] **Szegedi H.**, Tolnai É. E., Dobróka M., Turai E. 2012. A new robust Fourier transform algorithm using inversion tools. Near Surface Geoscience 2012 - 18<sup>th</sup> European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics, Paris, 2012.09.03-05, EAGE, 1-4, Paper 66, ISBN 978-90-73834-34-7.

#### HAZAI KONFERENCIÁK KIADVÁNYAI

- [1] **Szegedi H.** 2014. Examination the noise reduction capability of the inversion based Fourier transform. XXVIII. microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference, University of Miskolc, 2014.04.10-11, ISBN 978-963-358-051-6.
- [2] Dobróka M., **Szegedi H.** 2012. On a robust Fourier transform using Steiner's weights. XXXIII. Conference & Exhibition on Earth Sciences and Environmental Protection, Miskolc, 2012.09.27-29.

- 
- [3] **Szegedi H.** 2012. On the use of Steiner's weights in Fourier transform. 8<sup>th</sup> International Conference of PhD Students, Miskolc, 2012.08.05-11, ISBN 978-963-661-994-7.
- [4] Dobróka M., **Szegedi H.**, Kormos K. 2012. Two-dimensional Fourier transform algorithm using inversion tools. XXVI. microCAD International Scientific Conference, Miskolc, 2012.03.29-30, ISBN 978-963-661-773-8.
- [5] **Szegedi H.** 2011. A Fourier transzformáció számításának új inverziós módszere. Doktoranduszok fóruma, Miskolc, 2011.11.08.

#### **NEMZETKÖZI KONFERENCIA ELŐADÁSOK**

- [1] Dobróka M., **Szegedi H.**, Somogyiné Molnár J. 2014. A New Robust Inversion Method Using Cauchy-Steiner Weights - And Its Application in Data Processing. Near Surface Geoscience 2014 - 20<sup>th</sup> European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics, Athens.
- [2] **Szegedi H.** 2013. Increasing the Noise Rejection Capability of Fourier Transform by Using Inversion Methods. International Workshop: Advances in Geophysical inverse Theory, Italy, Roma, 2013.02.04-08.
- [3] **Szegedi H.**, Tolnai É. E., Dobróka M., Turai E. 2012. A new robust Fourier transform algorithm using inversion tools. Near Surface Geoscience 2012 - 18<sup>th</sup> European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics, Paris, 2012.09.03-05.

#### **HAZAI KONFERENCIA ELŐADÁSOK**

- [1] **Szegedi H.**, Dobróka M. 2014. Robusztus Fourier transzformáció Steiner-súlyok alkalmazásával. Inverziós Ankét, 2014.10.06-07.
- [2] **Szegedi H.**, Dobróka M. 2014. Robusztus Fourier transzformáció alkalmazása szeizmikus attribútumok számítására. Inverziós Ankét, 2014.10.06-07.
- [3] **Szegedi H.** 2014. Examination the noise reduction capability of the inversion based Fourier transform. microCAD, A1 section: Environmental Science: Sustainable National Resources Management Symposium. Miskolc, 2014.04.10-11.
- [4] Dobróka M., **Szegedi H.**, 2012. On a robust Fourier transform using Steiner's weights. XXXIII. Conference & Exhibition on Earth Sciences and Environmental Protection, Miskolc, 2012.09.27-29.

- [5] **Szegedi H.** 2012. On the use of Steiner's weights in Fourier transform. 8<sup>th</sup> International Conference of PhD Students, Miskolc, 2012.08.05-11.
- [6] Dobróka M., **Szegedi H.**, Kormos K. 2012. Two-dimensional Fourier transform algorithm using inversion tools. XXVI. microCAD International Scientific Conference, Miskolc, 2012.03.29-30.